ΠΕΡΙ ΤΟΥ ΑΞΙΩΜΑΤΟΣ ΤΗΣ ΣΥΝΕΧΕΙΑΣ

1. Ἡ λέξις συνέχεια δὲν ἀπαντᾷ ὡς ὅρος μαθηματικὸς εἰς τὴν ἀρχαίαν ἑλληνικὴν μαθηματικὴν βιβλιογραφίαν. Ὁ Ἀριστοτέλης εἰς τὴν πραγματείαν αὐτοῦ «Φυσικῆς ἀκροάσεως» διατυπώνει ὡς ἑξῆς τὴν ἔννοιαν τῆς συνεχείας μεταξὺ μεγεθῶν:

«Ἐφεξῆς μὲν γάρ ἐστιν, ὧν μηθέν ἐστι μεταξὺ συγγενές, στιγμῶν δ' ἀεὶ τὸ μεταξὺ γραμμή» ἤτοι δύο μεγέθη εἶναι ἐφεξῆς, ὅταν μεταξὺ αὐτῶν δὲν παρεμβάληται ἄλλο συγγενὲς μέγεθος, τὸ διάστημα δὲ μεταξὺ δύο στιγμῶν εἶναι πάντοτε γραμμή (Z1. 231 b 8—9). Ὀλίγον κατωτέρω, εἰς τὴν αὐτὴν πραγματείαν ὑπάρχει ἡ ἑξῆς διατύπωσις:

«Λέγω δὲ συνεχὲς τὸ διαιρετὸν εἰς ἀεὶ διαιρετά» (Z2. 232 b 24—25).

2. Εἰς τὰ Στοιχεῖα τοῦ Εὐκλείδου τὸ σήμερον λεγόμενον ἀξίωμα τῆς συνεχείας ἀπαντᾷ ὡς τέταρτος ὁρισμὸς εἰς τὸ V βιβλίον καὶ ἔχει ὡς ἑξῆς: «Λόγον ἔχειν πρὸς ἄλληλα μεγέθη λέγεται, ἃ δύναται πολλαπλασιαζόμενα ἀλλήλων ὑπερέχειν» ἤτοι (δύο) μεγέθη λέγεται ὅτι μεταξύ των ἔχουν σχέσιν τινα, ὅταν πολλαπλασιαζόμενα ὑπερέχουν ἀλλήλων. Ἡ ἔννοια τοῦ ὁρισμοῦ τούτου δὲν ἀποδίδεται πιστῶς ἐκ τῆς κατὰ λέξιν μεταφράσεως. Εἰς τὸ 8ον ὅμως θεώρημα τοῦ αὐτοῦ V βιβλίου τῶν Στοιχείων γίνεται φανερὸν ὅτι ἡ ἔννοια τοῦ ὁρισμοῦ τούτου ἡ ἀκριβὴς εἶναι ἡ ἑξῆς: ἐὰν δοθῶσι δύο ἄνισα μεγέθη, ἡ διαφορὰ τούτων ἐπαναλαμβανομένη πολλάκις εἶναι δυνατὸν νὰ γίνῃ μεγαλυτέρα παντὸς μεγέθους, ὁσονδήποτε μεγάλου.

3. Εἰς τὰ σωζόμενα ἔργα τοῦ Ἀρχιμήδους μνημονεύεται τὸ ἀξίωμα τῆς συνεχείας τρεῖς φορὰς ὡς ἑξῆς:

α΄. «Ἔτι δὲ τῶν ἀνίσων γραμμῶν καὶ τῶν ἀνίσων ἐπιφανειῶν καὶ τῶν ἀνίσων στερεῶν τὸ μεῖζον τοῦ ἐλάσσονος ὑπερέχειν τοιούτῳ, ὃ συντιθέμενον αὐτὸ ἑαυτῷ δυνατόν ἐστιν ὑπερέχειν παντὸς τῶν πρὸς ἄλληλα λεγομένων» (Περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου Α΄ προλεγόμενα ε΄, σελ. 8, ἔκδ. Heiberg, Λειψία 1910).

(Προσέτι δὲ ὅταν ἔχωμεν ἀνίσους γραμμὰς καὶ ἀνίσους ἐπιφανείας καὶ ἄνισα στερεὰ ἡ διαφορὰ τοῦ μεγαλυτέρου ἀπὸ τοῦ μικροτέρου ἐπαναλαμβανομένη πολλάκις εἶναι δυνατὸν νὰ γίνῃ μεγαλυτέρα παντὸς ἐκ τῶν συγκρινομένων μεγεθῶν).

β΄. «Τᾶν ἀνισᾶν γραμμᾶν καὶ τῶν ἀνίσων χωρίων τὰν ὑπεροχάν, ᾇ ὑπερέχει τὸ μεῖζον τοῦ ἐλάσσονος, αὐτὰν ἑαυτᾷ συντιθεμέναν δυνατὸν εἶμεν παντὸς ὑπερίσχειν τοῦ προτεθέντος τῶν ποτ' ἄλλαλα λεγομένων» (Περὶ ἑλίκων τόμ. II, σελ. 12, 7, Heiberg 1913).

(Τῶν ἀνίσων γραμμῶν καὶ τῶν ἀνίσων ἐπιφανειῶν ἡ ὑπεροχὴ καθ' ἣν ὑπερέχει τὸ μεγαλύτερον τοῦ μικροτέρου ἐπαναλαμβανομένη πολλάκις εἶναι δυνατὸν νὰ γίνῃ μεγαλυτέρα παντὸς τῶν συγκρινομένων μεγεθῶν).

γ'. «Τῶν ἀνίσων χωρίων τὰν ὑπεροχάν, ᾇ ὑπερέχει τὸ μεῖζον τοῦ ἐλάσσονος, δυνατὸν εἶμεν αὐτὰν ἑαυτᾷ συντιθεμέναν παντὸς ὑπερέχειν τοῦ προτεθέντος πεπερασμένου χωρίου» (Τετραγωνισμὸς παραβολῆς, τόμ. II, σελ. 264, 9)

(Τῶν ἀνίσων ἐπιφανειῶν ἡ ὑπεροχὴ τοῦ μεγαλυτέρου ἀπὸ τοῦ μικροτέρου ἐπαναλαμβανομένη πολλάκις εἶναι δυνατὸν νὰ γίνῃ μεγαλυτέρα πάσης δοθείσης πεπερασμένης ἐπιφανείας).

Ἀμέσως μετὰ τοῦτο προσθέτει ὁ Ἀρχιμήδης ὅτι οἱ προηγούμενοι αὐτοῦ γεωμέτραι διὰ τοῦ ἀξιώματος αὐτοῦ ἀπέδειξαν, ὅτι οἱ κύκλοι εἶναι πρὸς ἀλλήλους ὡς τὰ τετράγωνα τῶν διαμέτρων (Εὐκλείδου Στοιχεῖα XII 2), ὅτι αἱ σφαῖραι εἶναι πρὸς ἀλλήλας ὡς οἱ κύβοι τῶν διαμέτρων (Εὐκλ, XII 18), ὅτι πᾶσα πυραμὶς εἶναι τὸ τρίτον μέρος πρίσματος ἔχοντος τὴν αὐτὴν βάσιν πρὸς τὴν πυραμίδα καὶ ὕψος ἴσον (Εὐκλ. XII 7) καὶ ὅτι πᾶς κῶνος εἶναι τὸ τρίτον μέρος κυλίνδρου ἔχοντος τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ ὕψος ἴσον (Εὐκλ. XII 10). Εἰς τὴν εἰσαγωγὴν ἑκάστης τῶν πραγματειῶν Περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου καὶ Περὶ τῶν μηχανικῶν θεωρημάτων πρὸς Ἐρατοσθένη ἔφοδος, σημειώνει ὁ Ἀρχιμήδης ὅτι τὰ θεωρήματα : ἡ πυραμὶς εἶναι τὸ τρίτον πρίσματος ἔχοντος τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ ὕψος ἴσον καὶ ὁ κῶνος εἶναι τὸ τρίτον κυλίνδρου ἔχοντος τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ ὕψος ἴσον εἶναι ἀνακαλύψεις τοῦ Εὐδόξου.

Δὲν εἶναι γνωστὸν ποῖος ἀπέδειξε τὸ θεώρημα ὅτι αἱ σφαῖραι εἶναι ὡς οἱ κύβοι τῶν διαμέτρων. Διὰ τὴν ἀπόδειξιν ὅμως τοῦ θεωρήματος ὅτι οἱ κύκλοι εἶναι ὡς τὰ τετράγωνα τῶν διαμέτρων γνωρίζομεν παρὰ τοῦ Σιμπλικίου ὅτι κατὰ τὸν ἱστορικὸν τῆς γεωμετρίας Εὔδημον αὕτη ὀφείλεται εἰς τὸν Ἱπποκράτη τὸν Χῖον. (Σιμπλικίου Ι. 2 σχόλια εἰς Φυσικὰ Ἀριστοτέλους 185α 14).

4. Κεκαλυμμένην ἐφαρμογὴν τοῦ ἀξιώματος τῆς συνεχείας παρέχει εἰς ἡμᾶς ὁ Θέων ὁ Σμυρναῖος εἰς τὴν πραγματείαν του Περὶ τῶν κατὰ τὸ μαθηματικὸν χρησίμων εἰς τὴν Πλάτωνος ἀνάγνωσιν (Ἔκδ. Hiller, Lipsiae 1878 σελ. 44—45), ὅπου γίνεται μνεία τῶν λεγομένων πλευρικῶν καὶ διαμετρικῶν ἀριθμῶν. Κατὰ ταῦτα θεωρεῖται ἀπειροελαχίστως μικρὸν τετράγωνον ἔχον διάμετρον (δηλ. διαγώνιον) ἴσην μὲ τὴν μονάδα καὶ πλευρὰν ἴσην μὲ τὴν μονάδα καὶ κατασκευάζονται διαδοχικῶς τετράγωνα τῶν ὁποίων αἱ πλευραὶ καὶ αἱ διάμετροι (δηλ. διαγώνιοι) λαμβάνουν τὰς ἑξῆς τιμάς :

	Πλευρά	διάμετρος (διαγώνιος)
1ον τετράγωνον	1	1
2ον »	1 + 1 = 2	2 + 1 = 3
3ον »	2 + 3 = 5	5 + 2 = 7
4ον »	5 + 7 = 12	12 + 5 = 17

5ον	»	$12 + 17 = 29$	$29 + 12 = 41$
6ον	»	$29 + 41 = 70$	$70 + 29 = 99$
7ον	»	$70 + 99 = 169$	$169 + 70 = 239$
8ον		$169 + 239 = 408$	$408 + 169 = 577$
⋮			
ν		$\alpha_{\nu-1} + \delta_{\nu-1} = \alpha_\nu$	$2\alpha_{\nu-1} + \delta_{\nu-1} = \delta_\nu$

Οἱ ἀνωτέρω πλευρικοὶ καὶ διαμετρικοὶ ἀριθμοὶ ἀποτελοῦν τὰς ἀκεραίας λύσεις τῆς διοφαντικῆς ἐξισώσεως

$$y^2 = 2x^2 \mp 1$$

τὴν ὁποίαν μνημονεύει ὁ Πλάτων εἰς τὴν Πολιτείαν (546 c) λέγων «...ἀπὸ διαμέτρων ῥητῶν πεμπάδος, δεομένων ἑνὸς ἑκάστων ἀρρήτων δὲ δυοῖν» ἤτοι τὸ τετράγωνον, τὸ ὁποῖον ἔχει πλευρὰν=5 θὰ ἔχῃ κατὰ τὸ πυθαγόρειον θεώρημα διαγώνιον δ, λαμβανομένην ἐκ τοῦ τύπου

$$\delta^2 = 2.5^2, \text{ ὁπότε}$$

$\delta = \sqrt{2 \,.\, 5^2}$. Ἡ διαγώνιος αὕτη γίνεται ῥητή, ὅταν ἐκ τῆς ὑπορρίζου ποσότητος ἀφαιρεθῇ ἡ μονάς, ὁπότε ἔχομεν

$$\delta = \sqrt{2.5^2 - 1} = \sqrt{50 - 1} = \sqrt{49} = 7,$$

ὅπερ ἐννοεῖται ἐκ τῆς ἀνωτέρω φράσεως τοῦ Πλάτωνος, ἀπὸ διαμέτρων ῥητῶν πεμπάδος δεομένων ἑνὸς ἑκάστων.

Ἐὰν ἀπὸ τοῦ 50 ἀφαιρέσωμεν τὸν 2 θὰ ἔχωμεν

$$\delta = \sqrt{50 - 2} = \sqrt{48}, \text{ διαγώνιον ἄρρητον.}$$

Αὐτὸ τὸ χωρίον τῆς Πολιτείας θέλει νὰ ἑρμηνεύσῃ ὁ Θέων ὁ Σμυρναῖος παραθέτων ὀλίγα τινα περὶ πλευρικῶν καὶ διαμετρικῶν ἀριθμῶν, ἐξόχως ὅμως σπουδαῖα διὰ τὴν Ἱστορίαν τῶν Μαθηματικῶν.

Ἐὰν τῶν ἀνωτέρω πλευρικῶν καὶ διαμετρικῶν ἀριθμῶν σχηματίσωμεν τοὺς λόγους τῶν ἀντιστοίχων διαμέτρων (δηλ. διαγωνίων) πρὸς τὰς πλευρὰς παρατηροῦμεν ὅτι αἱ λόγοι περιττῆς τάξεως ἀποτελοῦν αὔξουσαν ἀκολουθίαν ἔχουσαν ἀνώτερον φράγμα τὴν $\sqrt{2}$, ἐν ᾧ οἱ λόγοι ἀρτίας τάξεως ἀποτελοῦν ἐλαττουμένην ἀκολουθίαν ἔχουσαν κατώτερον φράγμα τὸ αὐτὸ ἤτοι

$$\frac{1}{1} < \frac{7}{5} < \frac{41}{29} < \frac{239}{169} < \ldots \sqrt{2} \ldots < \frac{577}{408} < \frac{99}{70} < \frac{17}{12} < \frac{3}{2}.$$

Ὁ Θέων δὲν ὁμιλεῖ περὶ τῶν φραγμάτων αὐτῶν, καὶ δι' αὐτὸ ἐσημειώσαμεν ἀνωτέρω ὅτι γίνεται κεκαλυμμένη ἐφαρμογὴ τοῦ ἀξιώματος τῆς συνεχείας. Τὸ ἀξίωμα τοῦτο σημαίνει τὸ ἑξῆς :

Ἐὰν δοθῇ μία ἀριθμητικὴ τιμὴ ἀπέχουσα ἐλάχιστα ἐκ τῆς $\sqrt{2}$, εἴτε ἐκ τῶν κάτω πρὸς τὰ ἄνω βαίνομεν (ἀκολουθία ἀριστερὰ) εἴτε ἐκ τῶν ἄνω πρὸς τὰ κάτω (ἀκολουθία δεξιὰ) εἶναι δυνατὸν νὰ καταστήσωμεν τὴν διαφορὰν τῶν λόγων τούτων ἀπὸ τῆς $\sqrt{2}$ ἀκόμη μικροτέραν, σχηματίζοντες τοὺς ἑπομένους πλευρικοὺς καὶ διαμετρικοὺς λόγους, ὡς τοῦτο εἶναι φανερόν. Ἀκριβῶς δὲ αὐτὸ τὸ περιστατικὸν ἐκφράζει τὸ ἀξίωμα τῆς συνεχείας.

5. Ὁ Δαυΐδ Χίλμπερτ ὀνομάζει τὸ ἀξίωμα τῆς συνεχείας, ἀξίωμα τοῦ Ἀρχιμήδους (ἐσφαλμένως) καὶ διατυπώνει τοῦτο ὡς ἑξῆς. V_I (Ἀξίωμα μετρήσεως ἢ ἀρχιμήδειον ἀξίωμα) :

Ἐὰν ΔΒ καὶ CD εἶναι δύο τυχόντα εὐθύγραμμα τμήματα, ὑπάρχει ἀριθμός τις n τοιοῦτος, ὥστε ἡ διαδοχικῶς n—φορὰς ἀφαίρεσις τοῦ τμήματος CD ἀπὸ τοῦ AB θὰ ὁδηγήσῃ πέραν τοῦ σημείου B. Ἡ διατύπωσις αὐτὴ θὰ ἦτο ἀληθὴς ὅταν ἐσημειοῦτο $AB > CD$, ἐν ᾧ τοῦτο δὲν λέγεται καὶ ζητεῖται τοὐναντίον τὰ τμήματα AB, CD νὰ εἶναι τυχόντα (David Hilbert, Grundlagen der Geometrie, ed. Paul Bernays, Stuttgart 1956, σελ. 30).

6) Πρῶτος διατυπώσας τὸ ἀξίωμα τῆς συνεχείας θεωρεῖται ὁ ἐκ Κλαζομενῶν τῆς Μ. Ἀσίας καταγόμενος Ἀναξαγόρας (ἀκμὴ περὶ τὸ 450 π. Χ.), ὅστις εἰς τὴν ὑπὸ τὸν τίτλον Περὶ φύσεως πραγματείαν του, τῆς ὁποίας σώζονται ἐλάχιστα ἀποσπάσματα, γράφει τὰ ἑξῆς :

Οὔτε γὰρ τοῦ σμικροῦ ἐστι τό γε ἐλάχιστον, ἀλλ' ἔλασσον ἀεὶ (τὸ γὰρ ἐὸν οὐκ ἔστι τὸ μὴ οὐκ εἶναι) — ἀλλὰ καὶ τοῦ μεγάλου ἀεί ἐστι μεῖζον. καὶ ἴσον ἐστὶ τῷ σμικρῷ πλῆθος, πρὸς ἑαυτὸ δὲ ἕκαστόν ἐστι καὶ μέγα καὶ σμικρόν.

(Διότι οὔτε τοῦ μικροῦ ὑπάρχει τὸ ἐλάχιστον, ἀλλὰ πάντοτε ὑπάρχει μικρότερον (διότι τὸ ὑπάρχον εἶναι ἀδύνατον νὰ γίνῃ μὴ ὑπάρχον (διὰ τῆς συνεχοῦς διαιρέσεως)—ἀλλὰ καὶ τοῦ μεγάλου ὑπάρχει πάντοτε μεγαλύτερον. Καὶ εἶναι ἴσον κατὰ τὸ πλῆθος πρὸς τὸ μικρὸν (δηλ. τὸ ὁσονδήποτε μεγάλο ἀποτελεῖται ἀπὸ πολλὰ μικρά), ὡς πρὸς τὸν ἑαυτόν του ὅμως πᾶν μέγεθος εἶναι καὶ μέγα καὶ μικρόν). (H. Diels, Fragmente der Vorsokratiker II, Berlin 1952, B 3 σελ. 33).

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Pauly — Wissowa R. E, Eukleides § 12.

Paul — Henri Michel. De Pythagore à Euclide, Les Belles Lettres, Paris 1950, p. 438 ff.

Knopp, K. Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen, Springer, Berlin 1931, S. 26—27.

Σταμάτης Εὐάγγελος. Εὐκλείδου Γεωμετρία — Θεωρία ἀριθμῶν, Στοιχείων τόμος II, Ἀθῆναι 1953, σελ. 8—11.