ΕΥΑΓΓΕΛΟΥ Σ. ΣΤΑΜΑΤΗ

ΚΑΝΟΝΙΚΟΝ ΕΠΤΑΓΩΝΟΝ ΤΟΥ ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ

Ἀνακατασκευὴ εἰς τὴν σικελικὴν δωρικὴν διάλεκτον τοῦ Ἀρχιμήδους τοῦ ἀπολεσθέντος κειμένου τῆς πραγματείας αὐτοῦ «Περὶ τῆς κατασκευῆς τῆς πλευρᾶς τοῦ εἰς τὸν κύκλον ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ ἑπταγώνου», ἡ ὁποία σῴζεται εἰς τὴν ἀραβικήν.

Κατὰ τὸ ἔτος 1927 ἐξεδόθη εἰς τὸ Ἀννόβερον ὑπὸ τῶν Julius Ruska καὶ Heinrich Wieleitner ἡ πραγματεία τοῦ Carl Schoy ἡ περιέχουσα μετάφρασιν τοῦ ἔργου τοῦ Πέρσου ἀστρονόμου al-Biruni (973—1048) ὑπὸ τὸν τίτλον «Μαθήματα Τριγωνομετρίας» [1]. Εἰς τὴν πραγματείαν αὐτὴν τοῦ al-Biruni περιλαμβάνονται καὶ 17 προτάσεις ὑπὸ τὸν τίτλον «Περὶ τῆς κατασκευῆς τῆς πλευρᾶς τοῦ εἰς τὸν κύκλον ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ ἑπταγώνου», τοῦ Ἀρχιμήδους, ἐκ μεταφράσεως ἐφθαρμένου ἑλληνικοῦ κειμένου, γενομένης ὑπὸ τοῦ Tabit Ibn Qurra (826—901). Ἐκ τῶν 17 προτάσεων μόνον αἱ ὑπ' ἀριθμ. 16 καὶ 17 ἀφορῶσιν εἰς τὸ ἑπτάγωνον, ἐν ᾧ αἱ ὑπ' ἀριθμ. 1—13 ἀναφέρονται εἰς ὀρθογώνια τρίγωνα καὶ αἱ ὑπ' ἀριθμ. 14-15 ἀναφέρονται εἰς κύκλους.

Εἰς τὸν πρόλογον τῆς μεταφράσεως τῆς πραγματείας τοῦ Ἀρχιμήδους ὁ Tabit Ibn Qurra γράφει τὰ ἑξῆς·

«Ἐν ὀνόματι τοῦ Θεοῦ, τοῦ εὐσπλάχνου καὶ οἰκτίρμονος!

Τὸ βιβλίον τοῦ Ἀρχιμήδους, τὸ ὁποῖον πραγματεύεται τὴν διαίρεσιν τοῦ κύκλου εἰς 7 ἴσα μέρη, μεταφρασθὲν ὑπὸ Abu'l-Hasan Thabit Ibn Qurra al-Harrani. Τὸ ἔργον ἀποτελεῖται ἐκ μιᾶς πραγματείας καὶ 17 σχημάτων.

Καὶ λέγω μετὰ τὸν αἶνον πρὸς τὸν Ἀλλὰχ καὶ τὰς εὐχὰς πρὸς τὸν προφήτην του καὶ τὴν οἰκογένειάν του, ὅτι τὸ βιβλίον αὐτὸ δὲν ὑπάρχει πλέον εἰς τὸ πρωτότυπον καὶ διὰ τὸν λόγον αὐτὸν δὲν τὸ εἶχον εἰς τὴν διάθεσίν μου, ἀλλὰ εἶχον ἓν ἀπόκρυφον κατεστραμμένον χειρόγραφον, ἕνεκα τῆς ἀμαθείας τοῦ ἀντιγραφέως καὶ τῆς ἀγνοίας αὐτοῦ περὶ τοῦ ἀντικειμένου. Καὶ κατέβαλον μεγάλον κόπον διὰ νὰ ἀνεύρω δυνατότητας ἐπαληθεύσεως τῶν ἐπ' αὐτοῦ ἀποριῶν καὶ ἀνεύρω λύσεις περὶ αὐτῶν καὶ τὴν κανονικὴν διάταξιν τῶν σχημάτων, πρὸς τὸν σκοπὸν εὐκόλου ἐξετάσεως καὶ ἐρεύνης τῶν πηγῶν. Πιθανῶς νὰ χρησιμοποιήσω μερικὰς ἀποδείξεις τῶν μεταγενεστέρων. Πρὸς τούτοις ὁ Ἀλλάχ, ὁ παρέχων βοήθειαν, ἂς δώσῃ διὰ τῆς συμπαραστάσεώς του ἐπιτυχίαν εἰς τὸ ἔργον μου».

Κατωτέρω παρέχομεν τὴν μετάφρασιντῶν δύο θεωρημάτων ὑπ' ἀριθ. 16 καὶ 17 ἐκ τῆς γερμανικῆς καὶ τὴν ἀνακατασκευὴν τοῦ ἀπολεσθέντος Ἀρχιμηδείου κειμένου εἰς τὴν γλῶσσαν τοῦ Ἀρχιμήδους.

1) Carl Schoy, Die trigonometrischen Lehren des persischen Astronomen al-Biruni, von Julius Ruska - Heinrich Wieleitner, Hannover 1927. Zu Kapitel I und IV. Über die Konstruktion der Seite des dem Kreise einbeschriebenen regulären Siebenecks.

16*

Ἔστω τετράγωνον τὸ ΑΒΓΔ καὶ ἐκβληθείσας τᾶς ΒΑ ἐπὶ τὸ Η σαμεῖον ἄχθω διάμετρος ἁ ΒΓ καὶ ἐκ τοῦ Δ διάχθω ἁ ΔΖ, ὥστε τρίγωνον τὸ ΑΖΕ τριγώνῳ τῷ ΓΤΔ ἴσον εἶμεν, ἄχθω δὲ διὰ τοῦ Τ σαμείου ἁ ΚΤΛ παρὰ τὰν ΑΓ. φαμὶ δή, τὸ ὑπὸ τᾶν ΑΒ, ΚΒ τῷ ἀπὸ τᾶς ΑΖ τετραγώνῳ ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ΖΚ, ΑΚ τῷ ἀπὸ τᾶς ΚΒ τετραγώνῳ ἴσον καὶ ἔτι ἑκάτερον τῶν τμαμάτων ΑΖ, ΒΚ τὰς ΑΚ μεῖζον.

Ἐπεὶ γὰρ τὸ ὑπὸ τᾶν ΓΔ, ΤΛ τῷ ὑπὸ τᾶν ΑΖ, ΑΕ ἴσον ἐστί, ἐσσεῖται, ὡς ἁ ΓΔ, τουτέστι ἁ ΑΒ ποτὶ τὰν ΑΖ, οὕτως ἁ ΑΕ ποτὶ τὰν ΤΛ. καὶ ἐπεὶ τρίγωνα τὰ ΖΑΕ, ΖΚΤ, ΤΛΔ ὁμοῖα ἐντί, ἐσσεῖται, ὡς ἁ ΑΕ ποτὶ τὰν ΤΛ, οὕτως ἁ ΑΖ ποτὶ τὰν ΛΔ, τουτέστι τὰν ΚΒ, ἔτι δέ, ὡς ἁ ΑΒ ποτὶ τὰν ΑΖ, οὕτως ἁ ΑΖ ποτὶ τὰν ΚΒ, καὶ ἔτι, ὡς ἁ ΤΛ, τουτέστιν ἁ ΑΚ, ποτὶ τὰν ΚΤ, τουτέστι τὰν ΚΒ, οὕτως ἁ ΛΔ, τουτέστιν ἁ ΚΒ ποτὶ τὰν ΖΚ. ἔστιν ἄρα τὸ ὑπὸ τᾶν ΑΒ, ΚΒ τῷ ἀπὸ τὰς ΑΖ τετραγώνῳ ἴσον καὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ΖΚ, ΑΚ τῷ ἀπὸ τᾶς ΚΒ τετραγώνῳ ἴσον καὶ ἑκατέρα τῶν δύο εὐθειῶν τῶν ΑΖ, ΚΒ τᾶς ΑΚ μείζων· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

17

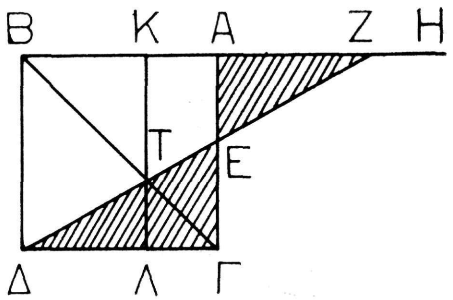
Δεδόσθω δὴ τὸν κύκλον ἑπτὰ ἴσοις μέρεσσι διελεῖν.

16*

Ἔστω τὸ τετράγωνον ΑΒΓΔ (σχ. 16). Προεκτείνομεν τὴν ΒΑ εὐθυγράμμως πρὸς τὴν διεύθυνσιν τοῦ Η καὶ φέρομεν τὴν διαγώνιον ΒΓ. Ἐκ τοῦ σημείου Δ φέρομεν τὴν ΔΖ κατὰ τοιοῦτον τρόπον, ὥστε τρίγωνον ΑΖΕ = τρίγωνον ΓΤΔ (ἰσοδύναμον). Διὰ τοῦ σημείου Τ φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΚΤΛ παράλληλον πρὸς τὴν ΑΓ. Λέγω, ὅτι

$$AB \cdot KB = AZ^2$$
$$ZK \cdot AK = KB^2$$

καὶ ἀκόμη, ὅτι ἑκάτερον τῶν τμημάτων ΑΖ, ΒΚ εἶναι $>$ ΑΚ.



Σχ. 16

Ἀπόδειξις. Ἐπειδὴ $\Gamma\Delta \cdot T\Lambda = AZ \cdot AE$, θὰ εἶναι $\frac{\Gamma\Delta\,(= AB)}{AZ} = \frac{AE}{T\Lambda}$ (Εὐκλ. 6, 16). Ἐπειδὴ καὶ τὰ τρίγωνα ΖΑΕ, ΖΚΤ, ΤΛΔ εἶναι ὅμοια, θὰ ἔχωμεν τὰς σχέσεις:

$$\frac{AE}{T\Lambda} = \frac{AZ}{\Lambda\Delta\,(= KB)}, \quad \frac{AB}{AZ} = \frac{AZ}{KB} \text{ καὶ}$$
$$\frac{T\Lambda\,(= AK)}{KT\,(= KB)} = \frac{\Lambda\Delta\,(= KB)}{ZK}, \text{ (Εὐκλ. 6, 4).}$$

Ἐκ τούτων ἔπεται:

$$AB \cdot KB = AZ^2$$
$$ZK \cdot AK = KB^2 \text{ (Εὐκλ. 6, 17),}$$

καὶ ἑκατέρα τῶν δύο εὐθειῶν ΑΚ. ΚΒ εἶναι $>$ ΑΚ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι,

17

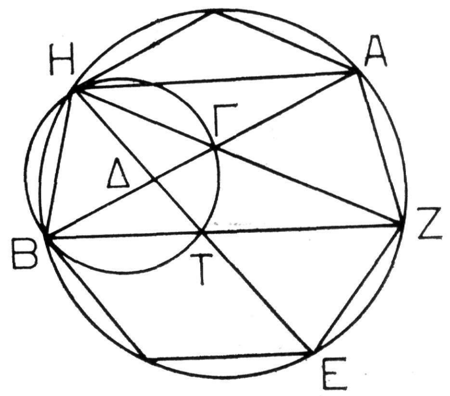
Θέλομεν τώρα νὰ χωρίσωμεν τὸν κύκλον εἰς ἑπτὰ ἴσα μέρη. Ἀπόδειξις.

* Ἡ ἀνακατασκευὴ τοῦ ἀρχαίου κειμένου εἰς τὴν σικελικὴν δωρικὴν διάλεκτον τοῦ Ἀρχιμήδους.

* Ἡ μετάφρασις τῶν 2 θεωρημάτων ἐκ τῆς γερμανικῆς.

Λελάφθω γὰρ εὐθεῖά τις ἁ ΑΒ καὶ ἐπ' αὐτᾶς δύο σαμεῖα τὰ Γ, Δ, ὥστε τὸ ὑπὸ τᾶν ΑΔ, ΓΔ τῷ ἀπὸ τᾶς ΔΒ τετραγώνῳ ἴσον εἶμεν, καὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ΓΒ, ΔΒ τῷ ἀπὸ τᾶς ΑΓ τετραγώνῳ ἴσον. ἐσσεῖται δὴ ἑκάτερον τῶν τμαμάτων ΑΓ, ΔΒ τοῦ ΓΔ τμάματος μεῖζον, ὡς ἐν τῷ πρότερον ἐδείχθη. συνεστάτω δὴ ἐκ τριῶν εὐθειῶν τῶν ΑΓ, ΓΔ, ΒΔ τρίγωνον τὸ ΓΗΔ. ἔστι δὲ ἁ ΓΗ τᾷ ΑΓ ἴσα, ἁ ΔΗ τᾷ ΔΒ καὶ ἁ ΓΔ τᾷ ΓΔ. περιγεγράφθω οὖν περὶ τῷ τρίγωνον ΑΗΒ κύκλος ὁ ΑΗΒΕΖ καὶ ἐκβεβλήσθων αἱ ΗΓ, ΗΔ ἐπὶ τὰ Ζ, Ε σαμεῖα τᾶς τοῦ κύκλου περιφερείας, ἀχθεῖσα δὲ ἁ ΒΖ συμβαλλέτω τᾷ ΗΕ

Λαμβάνομεν τὴν εὐθεῖαν ΑΒ (σχ. 17), τὴν ὁποίαν ὑποθέτομεν γνωστήν. Ἐπ' αὐτῆς λαμβάνομεν δύο σημεῖα Γ, Δ τοιαῦτα, ὥστε ΑΔ . ΓΔ = ΔΒ^2 καὶ ΓΒ . ΔΒ = ΑΓ^2. Πρὸς τούτοις εἶναι ἑκάτερον τῶν τμημάτων ΑΓ καὶ ΔΒ > ΓΔ, συμφώνως πρὸς τὸ προηγούμενον θεώρημα. Κατασκευάζομεν τώρα ἐκ τῶν εὐθειῶν ΑΓ, ΓΔ, ΒΔ, τὸ τρίγωνον ΓΗΔ (Εὐκλ. 1, 22), εἰς τὸ ὁποῖον εἶναι ΓΗ = ΑΓ, ΔΗ = ΔΒ καὶ ΓΔ = ΓΔ. Περιγράφομεν τώρα περὶ τὸ τρίγωνον ΑΗΒ τὸν κύκλον ΑΗΒΕΖ (Εὐκλ. 4, 5) καὶ προεκτείνομεν τὰς εὐθείας ΗΓ καὶ ΗΔ εὐθυγράμμως μέχρις ὅτου συναντήσουν τὴν



Σχ. 17

κατὰ τὸ Τ σαμεῖον καὶ ἐπεζεύχθω ἁ ΓΤ.

Ἐπεὶ γὰρ ἁ ΑΓ τᾷ ΓΗ ἴσα ἐστί, ἐσσεῖται ἐν τριγώνῳ τῷ ΑΓΗ γωνία ἁ ὑπὸ ΗΑΓ γωνίᾳ τᾷ ὑπὸ ΑΗΓ ἴσα καὶ περιφέρεια ἁ ΑΖ περιφερείᾳ τᾷ ΗΒ ἴσα. ἔστι δὲ τὸ ὑπὸ τᾶν ΑΓ, ΓΔ τῷ ἀπὸ τᾶς ΔΒ τετραγώνῳ, τουτέστι τῷ ἀπὸ τᾶς ΔΗ ἴσον, καὶ τρίγωνον τὸ ΑΗΔ τριγώνῳ τῷ ΓΗΔ ὁμοῖον. ἔστιν ἄρα γωνία ἁ ὑπὸ ΔΑΗ γωνίᾳ τᾷ ὑπὸ ΓΗΔ ἴσα, τουτέστι περιφέρεια ἁ ΖΕ περιφερείᾳ τᾷ ΒΗ ἴσα. τρεῖς ἄρα περιφέρειαι αἱ ΒΗ, ΑΖ, ΖΕ ἴσαι ἀλλάλαις ἐντί, [ἆκται δὲ ἁ ΖΒ παρὰ τὰν ΑΗ] καὶ αἱ τρεῖς γωνίαι αἱ ὑπὸ ΓΑΗ, ΓΗΔ, ΤΒΔ ἴσαι ἀλλάλαις ἐντί. τὰ ἄρα τέτταρα σαμεῖα τὰ Β, Η, Γ, Τ ἐπὶ τᾶς περιφερείας τοῦ αὐτοῦ κύκλου ἐντί. ἔστι δὲ ἁ ΗΔ τᾷ ΔΒ ἴσα καὶ ἁ ΓΔ

περιφέρειαν τοῦ κύκλου εἰς τὰ σημεῖα, ἔστω Ζ καὶ Ε. Αἱ εὐθεῖαι ΒΖ καὶ ΗΕ τέμνονται εἴς τι σημεῖον Τ. Φέρομεν τὴν ΓΤ. Ἕνεκα τῆς ἰσότητος ΑΓ = ΓΗ, εἰς τὸ τρίγωνον ΑΓΗ θὰ εἶναι γων. ΗΑΓ = γων. ΑΗΓ, τόξον ΑΖ = τόξον ΗΒ (Εὐκλ. 1, 5. 3, 26). Εἶναι δὲ ΑΔ . ΓΔ = ΔΒ^2 = ΔΗ^2 καὶ τὸ τρίγωνον ΑΗΔ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ τρίγωνον ΓΗΔ. Εἶναι ἄρα ἡ γωνία ΔΑΗ = πρὸς τὴν γωνίαν ΓΗΔ, δηλαδὴ τὸ τόξον ΖΕ = πρὸς τὸ τόξον ΒΗ. Κατὰ ταῦτα τὰ τρία τόξα ΒΗ, ΑΖ, καὶ ΖΕ εἶναι ἴσα μεταξύ των. Εἶναι δὲ γων. ΓΑΗ = γων. ΓΗΔ = γων. ΤΒΔ. Ἑπομένως τὰ τέσσαρα σημεῖα Β, Η, Γ, Τ κεῖνται ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ αὐτοῦ κύκλου. Καὶ εἶναι ΗΔ = ΔΒ, ΓΔ = ΔΤ, ΤΗ = ΒΓ.

τᾳ ΔΤ καὶ ἔτι ἁ ΤΗ τᾳ ΒΓ. ἐπεὶ οὖν τὸ ὑπὸ τᾶν ΤΗ, ΗΔ τῷ ἀπὸ τᾶς ΗΓ τετραγώνῳ ἴσον ἐστί, ἐντὶ ἄρα τρίγωνα τὰ ΤΗΓ, ΓΗΔ ὁμοῖα. ἔστι δὲ ἁ ΓΒ τᾶ ΤΗ ἴσα καὶ γωνία ἁ ὑπὸ ΔΓΗ γωνίᾳ τᾳ ὑπὸ ΗΤΓ, τουτέστι διπλασίων γωνίας τᾶς ὑπὸ ΓΑΗ, ἔτι δὲ γωνία ἁ ὑπὸ ΓΤΔ γωνίᾳ τᾳ ὑπὸ ΔΒΗ, τουτέστι διπλασίων γωνίας τᾶς ὑπὸ ΓΑΗ. ἔστιν ἄρα περιφέρεια ἁ ΑΗ περιφερείας τᾶς ΗΒ διπλασίων. καὶ ἐπεὶ γωνία ἁ ὑπὸ ΔΗΒ γωνίᾳ τᾳ ὑπὸ ΔΒΗ ἴσα ἐστί, ἐσσεῖται ἄρα περιφέρεια ἁ ΕΒ περιφερείας τᾶς ΗΒ διπλασίων, τουτέστιν ἑκατέρα τῶν περιφερειῶν ΑΗ, ΕΒ περιφερείας τᾶς ΗΒ διπλασίων ἐστίν. Διαιρέθη ἄρα κύκλος ὁ ΑΗΒΕΖ ἑπτὰ ἴσοις μέρεσσι· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Ἐκ τῆς σχέσεως $ΤΗ . ΗΔ = ΗΓ^2$ ἕπεται ἡ ὁμοιότης τῶν δύο τριγώνων ΤΗΓ, ΓΗΔ. Εἶναι δὲ ΓΒ = ΤΗ καὶ γων. ΔΓΗ = γων. ΗΤΓ = 2 γων. ΓΑΗ, γων. ΓΤΔ = γων. ΔΒΗ = 2. γων. ΓΑΗ,
Κατὰ ταῦτα εἶναι τόξον ΑΗ = 2 τόξον ΗΒ (Εὐκλ. 6, 33). Καὶ ἐπειδὴ γων. ΔΗΒ = γων. ΔΒΗ θὰ εἶναι καὶ τόξον ΕΒ = 2 τόξον ΗΒ, τουτέστιν ἑκάτερον τῶν τόξων ΑΗ καὶ ΕΒ = 2 τόξον ΗΒ, καὶ συνεπῶς ὁ κύκλος ΑΗΒΕΖ ἐχωρίσθη εἰς ἑπτὰ ἴσα μέρη· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Καὶ ἂς εἶναι αἶνος πρὸς τὸν Θεὸν τὸν ἕνα κλπ.

Καὶ ἐδῶ ἐτελείωσεν ἡ βελτίωσις καὶ ἡ ἐπιμελὴς σύνταξις αὐτοῦ τοῦ περιφήμου ἀντιγράφου, ἐκ τοῦ χειρογράφου τοῦ διορθώσαντος αὐτὸ **Φακίρου**. Θεέ, πρὸς ὃν αἶνος καὶ ὕμνος ἔστω, εὐλόγησον τὸν προσκυνητὴν τῆς Μέκκας Μουσταφᾶ, τὸν πιστόν μου γενναῖον υἱόν. Ἂς εἶναι ἔλεος ὁ Ἀλλὰχ πρὸς αὐτὸν καὶ ὅλους τοὺς Μουσουλμάνους.

(Σημείωσις. Αἱ παραπομπαὶ εἰς τὰ Στοιχεῖα τοῦ Εὐκλείδου ἔγιναν ὑπ' ἐμοῦ).

SUMMARY

Reconstruction in the sicilian doric dialect of Archimedes af the lost text of the theorems 16 and 17 of his treatise «About the construction of the side of the inscribed in the circle regular heptagonon» which was preserved in an arabic translation, edided by Julius Ruska and Heinrich Wieleitner, Hannover 1927.