

ΠΕΡΙ ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΩΝ ΣΥΝΟΛΩΝ ΠΑΡΑ ΠΛΑΤΩΝΙ

Α'. Ο Γεώργιος Κάντορ εις τὴν πραγματείαν αὐτοῦ Ἄρχει μίᾳ γενικῆς θεωρίας τῶν συνόλων, σελ 43, Λειψία 1883 (*Grundlagen einer allgemeinen Mannichfaltigkeitslehre*) γράφει τὰ ἑξῆς: Θεωρῶ ποικιλίαν ἢ σύνολον πᾶν πλήθος, τὸ ὁποῖον νοεῖται ὡς ἓν, δηλ. πᾶσαν συμπερίληψιν καθωρισμένων στοιχείων, τὰ ὁποῖα δυνάμει ἑνὸς νόμου δύνανται νὰ συνδεθῶσιν εἰς ἓν σύνολον καὶ πιστεύω ὅτι διὰ τούτου ὀρίζω τι, τὸ ὁποῖον εἶναι συγγενὲς πρὸς τὸ Πλατωνικὸν εἶδος ἢ ἰδέαν, ὡς ἐπίσης καὶ πρὸς ἐκεῖνο, τὸ ὁποῖον ὁ Πλάτων εἰς τὸν διάλογον αὐτοῦ Φίλητος ὀνομάζει μεικτόν.

Β'. Περὶ ἰδεῶν καὶ εἰδῶν ὁμιλεῖ ὁ Πλάτων εἰς τινὰς διαλόγους αὐτοῦ μεταξὺ τῶν ὁποίων καὶ ὁ Παρμενίδης (129—135). Εἰς τὸν Παρμενίδην ὁμοῦ ἀνευρίσκομεν μεταξὺ ἄλλων σπουδαίων μαθηματικῶν ἔννοιῶν καὶ γενικὰς τινὰς ἀρχὰς μίᾳς θεωρίας περὶ συνόλων. Ἐκ τῆς θεωρίας ταύτης ἀναφέρομεν ἑνταῦθα μόνον στοιχεῖά τινα, ὡς εἶναι ὁ ὀρισμὸς τοῦ μέρους (στοιχείου) καὶ τοῦ ὅλου (συνόλου):

Τὸ μέρος πον μέρος ὅλου ἔστιν. Τί δὲ τὸ ὅλον; οὐχὶ οὗ ἂν μέρος μὴδὲν ἀπῆ ὅλον ἂν εἶη; (137 d - e).

— *Οὐκ ἄρα τῶν πολλῶν οὐδὲ πάντων τὸ μόριον μόριον, ἀλλὰ μίᾳς τινος ἰδέας καὶ ἑνὸς τινος, ὃ καλοῦμεν ὅλον, ἐξ ἀπάντων ἑν τέλειον γεγονός, τούτου μόριον ἂν τὸ μόριον εἶη (157 d - e).*

Ἑρμηνεία. Τὸ μέρος (στοιχεῖον) εἶναι βεβαίως μέρος ἑνὸς συνόλου. Τί εἶναι σύνολον; Δὲν εἶναι σύνολον ἐκεῖνο, ἀπὸ τοῦ ὁποῖου οὐδὲν μέρος ἀπουσιάζει;

— Οὐχὶ ἄρα τῶν πολλῶν οὐδὲ πάντων τῶν πραγμάτων τὸ μόριον (στοιχεῖον) εἶναι μόριον, ἀλλὰ μίᾳς τινος ἰδέας καὶ ἑνὸς τινος, τὸ ὁποῖον καλοῦμεν σύνολον καὶ τὸ ὁποῖον ἐξ ὅλων τῶν στοιχείων ἔχει σχηματισθῆ εἰς ἓν τέλειον, τούτου τὸ στοιχεῖον θὰ εἶναι στοιχεῖον.

Λίαν ἐνδιαφέρουσαν ἀνάπτυξιν τῆς θεωρίας τοῦ Πλάτωνος περὶ συνόλων ἀνευρίσκομεν εἰς τὰ σχόλια τοῦ Πρόκλου εἰς τὸν Παρμενίδην καὶ εἰς τὴν πραγματείαν τοῦ Ἰδίου, ἣτις φέρεται ὑπὸ τὸν τίτλον Πρόκλου Πλατωνικοῦ Στοιχείωσις Θεολογική (!)

* EVANGELOS STAMATIS, *The theory of sets by Plato*. Practica Akademie of Athens 16.10.1958.

¹ Ὁ Gordan χαρακτηρίζει τὴν πρώτην ἀπόδειξιν τοῦ Hilbert διὰ τὴν ὑπαρξιν τοῦ πεπερασμένου συστήματος ἀναλλοιώτων ὡς θεολογικήν. A. FRAENKEL, *Einleitung in die Mengenlehre*, Springer - Verlag, Berlin 1928, σελ. 227.

(Fridericus Creuzer, Francofurti ad Moenum, 1822). Αὕτη περιλαμβάνει 211 προτάσεις. Ἐπισημειώτεον ὅτι ἀναίρεσιν τῆς Θεολογικῆς Στοιχειώσεως τοῦ Πρόκλου ἐπιχειρεῖ διὰ 198 προτάσεων ὁ Ἐπίσκοπος Μεθώνης Νικόλαος διὰ τῆς πραγματείας αὐτοῦ «Ἀνάπτυξις τῆς Θεολογικῆς Στοιχειώσεως Πρόκλου Πλατωνικοῦ» (J. Th, Voemel, Francofurti ad Moenum, 1822). Καὶ ἡ πραγματεία ὁμοῦς αὕτη δύναται νὰ θεωρηθῆ ὡς συμβολὴ εἰς τὴν ἔρμηνειαν τῆς Πλατωνικῆς θεωρίας περὶ συνόλων. Κατωτέρω παραθέτομεν τέσσαρας ἐκ τῶν 211 προτάσεων τοῦ Πρόκλου, τὰς ὑπ' ἀριθμ. 66, 67, 68, 69 διὰ τῶν ὁποίων θεωροῦμεν, ὅτι ἐρμηνεύεται σημαντικῶς ἡ περὶ συνόλων θεωρία τοῦ Πλάτωνος.

Πρότασις 66.

Πάντα τὰ ὄντα πρὸ ἄλληλα ἢ ὅλα ἐστίν, ἢ μέρος, ἢ ταυτά, ἢ ἕτερα'

Ἐρμηνεία. Πάντα τὰ ὄντα θεωρούμενα πρὸς ἄλληλα ἢ εἶναι σύνολα ἢ εἶναι στοιχεῖα, ἢ τὰ αὐτὰ στοιχεῖα, ἢ διάφορα.

Πρότασις 67.

Πᾶσα ὁλότις ἢ πρὸ τῶν μερῶν ἐστίν, ἢ ἐκ τῶν μερῶν, ἢ ἐν τῷ μέρει. ἢ γὰρ ἐν τῇ αἰτίᾳ τὸ ἐκάστου θεωροῦμεν εἶδος, καὶ ὅλον ἐκεῖνο πρὸ τῶν μερῶν λέγομεν, τὸ ἐν τῷ αἰτίῳ ὑποστάν, ἢ ἐν τοῖς μετέχουσιν αὐτοῦ μέρεσι. Καὶ τοῦτο διχῶς. ἢ γὰρ ἐν ἅσασιν ὁμοῦ τοῖς μέρεσι, καὶ ἔστι τοῦτο ἐκ τῶν μερῶν ὅλον, οὗ καὶ ὄτιον μέρους ἀπὸν ἔλασσοι τὸ ὅλον' ἢ ἐν ἐκάστῳ τῶν μερῶν, ὡς καὶ τοῦ μέρους κατὰ μέθεξιν τοῦ ὅλου γεγονότος. ὃ καὶ ποιεῖ τὸ μέρος εἶναι ὅλον μερικῶς. καθ' ὕπαρξιν μὲν οὖν ὅλον τὸ ἐκ τῶν μερῶν' καὶ αἰτίαν δὲ τὸ πρὸ τῶν μερῶν' κατὰ μέθεξιν δὲ τὸ ἐν τῷ μέρει. Καὶ γὰρ τοῦτο κατὰ τὴν ἐσχάτην ὕφεισιν ὅλον, ἢ μιμνῆται τὸ ἐκ τῶν μερῶν ὅλον, ὅταν μὴ τὸ τυχὸν ἢ μέρος, ἀλλὰ τῷ ὅλῳ δυνάμενον ἀφομοιοῦσθαι, οὗ καὶ τὰ μέρη ὅλα ἐστίν.

Ἐρμηνεία. Πᾶν σύνολον ἢ ὑπάρχει πρὸ τῆς ὑπάρξεως τῶν στοιχείων του, ἢ ὑπάρχει ἐκ τῶν στοιχείων του, ἢ εἰς ἕκαστον στοιχεῖον του. Διότι ἢ θεωροῦμεν τὴν αἰτίαν ¹, δι' ἣν ἐδημιουργήθη τὸ εἶδος ἐκάστου πράγματος (στοιχείου), καὶ τότε τὸ σύνολον τῶν πραγμάτων τὸ γενόμενον κατ' ἀκολουθίαν τοῦ αἰτίου τῆς δημιουργίας τὸ λέγομεν σύνολον [ὑπάρχον πρὸ τῆς ὑπάρξεως τῶν μερῶν (στοιχείων), ἢ λέγομεν σύνολον κάτι, δυνάμει τῶν μερῶν, ἅτινα μετέχουσιν αὐτοῦ. Τὸ τελευταῖον τοῦτο σύνολον ὑπὸ διττὴν ἔννοιαν. 1) Ἡ διότι εἶναι σύνολον ἕνεκα ὄλων τῶν μερῶν αὐτοῦ, καὶ εἶναι τοῦτο σύνολον ἐξ ὄλων τῶν μερῶν του (στοιχείων του), καὶ τὸ ὁποῖον σύνολον ἐλαττοῦται, ὅταν ἀπουσιάσῃ τούτου ὁτιδήποτε μέρος. 2) Ἡ διότι ὑπάρχει σύνολον εἰς ἕκαστον τῶν μερῶν του (στοιχείων του) θεωρουμένου τοῦ μέρους ὡς γεγονότος κατὰ μέθεξιν τοῦ συνόλου. Πρᾶγμα τὸ ὁποῖον (ἢ μέθεξις) κάμνει τὸ μέρος (στοιχεῖον) νὰ εἶναι μερικὸν σύνολον (ὑποσύνολον). Καθ' ὕπαρξιν μὲν λοιπὸν ὑπάρχει σύνολον ἀπαρτιζόμενον ἐκ τῶν στοιχείων αὐτοῦ' κατ' αἰτίαν δὲ ὑπάρχει σύνολον πρὸ τῆς ὑπάρξεως τῶν

¹ Εἰς τὸν Φίληθον, τὸν ὁποῖον μνημονεύει ὁ G. Cantor ἀναφέρονται τέσσαρες ἀρχαὶ τῶν ὄντων: τὸ ἀπειρον, τὸ πέρασ ἔχον, τὸ ἐκ τούτων μεικτόν, καὶ ἡ αἰτία τῆς μείξεως τοῦ ἀπείρου καὶ τοῦ πέρασ ἔχοντος (23 c. . . 30 a).

μερῶν του (στοιχείων του) κατὰ μέθεξιν δὲ ὑπάρχει σύνολον εἰς ἓν μέρος (στοιχείον). Διότι καὶ τοῦτο (τὸ σύνολον ἑνὸς στοιχείου) εἶναι σύνολον κατὰ τὴν ἐσχάτην ὑπόστασιν, καθ' ὅσον τὸ στοιχείον σύνολον ἔχει τὰς ἰδιότητας τοῦ ἐκ τῶν στοιχείων ἀποτελουμένου συνόλου, ὅταν τὸ στοιχείον τοῦτο δὲν εἶναι τὸ τυχὸν μέρος, ἀλλὰ δύναται νὰ ἀφομοιωθῆ πρὸς τὸ σύνολον, τοῦ ὁποίου καὶ τὰ στοιχεῖα εἶναι σύνολα.

Πρότασις 68.

Πᾶν τὸ ἐν τῷ μέρει ὄλον, μέρος ἐστὶ τοῦ ἐκ τῶν μερῶν ὄλου. Εἰ γὰρ μέρος ἐστίν, ὄλου τινὸς ἐστὶ μέρος, καὶ ἦτοι τοῦ ἐν αὐτοῦ ὄλου, καθὸ λέγεται ἐν τῷ μέρει ὄλον. ἀλλ' οὕτως αὐτὸ ἑαυτοῦ μέρος, καὶ ἴσον τῷ ὄλω τὸ μέρος ἐστὶ καὶ ταῦτὸν ἐκάτερον ἢ ἄλλου τινος ὄλου. Καὶ εἰ ἄλλου, ἢ μόνον ἐστὶν ἐκείνου μέρος καὶ οὕτως οὐδὲν ἂν πάλιν τοῦ ὄλου διαφέρει, ἑνὸς ὄντος ἐν ὃν μέρος, ἢ μεθ' ἑτέρου.

Ἑρμηνεία. Πᾶν σύνολον ἀποτελούμενον ἐξ ἑνὸς στοιχείου εἶναι στοιχείον τοῦ ἐκ τῶν στοιχείων συνόλου. Διότι, ἐὰν τὸ σύνολον εἶναι ἓν στοιχείον, εἶναι στοιχείον συνόλου τινός. καὶ ἢ εἶναι στοιχείον τοῦ ἐν τῷ στοιχείῳ αὐτῷ συνόλου, καθόσον λέγεται σύνολον στοιχείου, ἀλλὰ τοιουτοτρόπως αὐτὸ εἶναι μέρος τοῦ ἑαυτοῦ του, καὶ θὰ εἶναι τὸ μέρος ἴσον πρὸς τὸ ὄλον, καὶ ἕκαστον ἐκ τῶν δύο (τὸ στοιχείον ὡς στοιχείον καὶ τὸ στοιχείον ὡς σύνολον) εἶναι τὸ αὐτὸ πρᾶγμα ἢ εἶναι στοιχείον ἄλλου τινός συνόλου. Καὶ ἐὰν εἶναι στοιχείον ἄλλου τινός συνόλου (θὰ συμβαίνωσι δύο τινά), ἢ θὰ εἶναι τοῦτο τὸ μόνον στοιχείον ἐκείνου τοῦ συνόλου, καὶ τοιουτοτρόπως οὐδὲν θὰ διαφέρῃ πάλιν τοῦ συνόλου, διότι ὑπάρχει ἓν μέρος (στοιχείον) ὑπάρχοντος ἑνός, ἢ θὰ ἀποτελῆ σύνολον μὲ ἄλλο στοιχείον.

Πρότασις 69.

Πᾶν τὸ ἐκ τῶν μερῶν ὄλον μετέχει τῆς πρὸ τῶν μερῶν ὀλότητος.

Ἑρμηνεία. Πᾶν τὸ ἐκ τῶν στοιχείων ἀποτελούμενον σύνολον μετέχει τοῦ συνόλου τοῦ ὑπάρχοντος πρὸ τῆς ὑπάρξεως τῶν στοιχείων.

S U M M A R Y

George Cantor, in his treatise «Principles of a general theory of sets» ¹, p. 43 (Leipzig 1883), mentions the following : I consider variety or set every multitude which is understood as a whole i. e., every summary of determined elements which, on the basis of a certain law, can be connected to a single set, and thus I believe that I define something which is relative to the platonic thing or idea and to that which, in this dialoge Philebus, Plato names as mixed» (μικτόν).

Plato discusses ideas and things in several of his dialoges. Parmenides is one of them (129 - 135). In this dialoge, among various important mathematical meanings, we find several general principles of a theory of

¹ Crundlagen einer allgemeinen Mannichfaltigkeitslehre.

sets. Out of this theory we only quote certain elements, such as the definition of the part (element) and the whole (set):

«The part surely is part of a whole. Yes. And what is the whole? Is not a whole of which no part is wanting?» (137 c).

«Then the part is a part, not of the many nor of all, but of a single form and a single concept which we call a whole, a perfect unity created out of all; this it is of which the part is a part» (157 d - e).

We meet a very interesting development of the platonic theory of sets in Proclus commentaries on Parmenides and in his treatise under the title «Theological Elementalism» [*Πρόκλου Διαδόχου Πλατωνικοῦ Στοιχείωσις Θεολογική*, Fridericus Creuzer, 1822]. It comprizes 211 Propositions. It should be noted that the Bishop of Methoni Nicolaus by his treatise «Development of Theological Elementalism of the Proclus» [*Νικολάου Ἐπισκόπου Μεθώνης. Ἀνάπτυξις τῆς θεολογικῆς στοιχειώσεως Πρόκλου Πλατωνικοῦ*, J. Th. Voemel, 1822], attempts to refute, which 198 Propositions, the theological Elementalism of Proclus. This treatise can be also considered as a contribution to interpretation of the platonic theory of sets.

We quote here 4 out of the 211 propositions of Proclus (66, 67, 68, 69) through which, we think, that the platonic theory of sets is considerably interpreted.

Proposition 66.

All things are in relation to themselves, either sets or elements' or are the same elements, or other elements.

Proposition 67.

Every set, either it exists prior to the existence of its elements or it exists own elements or it exists in each of its elements. Because we either consider the cause for which the thing of each element was created and then the set of things made in consequence of the cause of the creation is called set existing before the existence of the elements, or we call set something, due to the elements which participate in it. The last set is understood under two meanings as under: 1) Either because it is set owing to its all elements and it is set from all of its elements, and which set is being decreaded, when any of its elements is wanting. 2) Or because a set exists in each of its elements, the element being considered as fact participating in the set. The participation constitutes the part to be a subset. Therefore a) There exists a set consisting of its own elements b) There exists a set a priori, i. e. before the existence of its elements c) There exists a set by participation of a single element. Because this set of

one elements is a set in the last substance, so far as the element «set» has the properties of the set being of its elements, when this element is not the accidental part, but it can assimilated to the set, of which the elements are also sets.

Proposition 68.

Every set consisting of a single element is an element of the set which consists of the elements. Because if the set is simply an element it is then an element of a certain set and 1) Either it is an element of the set, being set of one only element, because it is said to be a set of the element, but thus it is element of itself, and the part should be equal to the whole, and each of the two (i. e. the element as an element and the element as a whole) is the same thing. 2) Or it is an element of some other set. And if it is an element of some other set then there will be two cases. First either it will be the only element of that set, and thus it will not differ from the set, because there exists an element of an existing one, or second the element will constitute a set with an other element.

Proposition 69.

Every set which consists of elements participates in the set, which exists before the existence of the elements.