ΕΥΑΓΓΕΛΟΥ Σ. ΣΤΑΜΑΤΗ

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ ΤΙΝΕΣ ΕΠΙ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ "ΠΑΡΙΣΟΤΗΤΟΣ ΑΓΩΓΗ" ΤΟΥ ΔΙΟΦΑΝΤΟΥ (ΜΕΘΟΔΟΣ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΕΩΣ)

I

Εἰς τὸ 5ον βιβλίον τῶν 'Αριθμητικῶν τοῦ Διοφάντου παρουσιάζεται ἡ περίπτωσις νὰ ἀναλυθῇ δοθεὶς ἀκέραιος εἰς ἄθροισμα δύο ἴσων περίπου τετραγώνων (V 9) ἢ εἰς ἄθροισμα τριῶν ἴσων περίπου τετραγώνων (V 11). Ἡ χρησιμοποιουμένη πρὸς τοῦτο μέθοδος προσεγγίσεως καλεῖται ὑπὸ τοῦ Διοφάντου παρισότητος ἀγωγή. Εἰς ἕκαστον τῶν προβλημάτων τούτων ὑπάρχει περιορισμὸς καθορίζων πότε τὸ πρόβλημα εἶναι δυνατὸν νὰ ἔχῃ λύσιν. Οὕτω, εἰς τὸ πρόβλημα V 9 ὁ περιορισμὸς εἶναι:

Διὰ νὰ ἔχῃ τὸ πρόβλημα λύσιν (νὰ ἀναλύεται δηλ. ὁ δοθεὶς ἀκέραιος εἰς ἄθροισμα δύο τετραγώνων) πρέπει ὁ δοθεὶς ἀκέραιος, ἔστω α, νὰ μὴ εἶναι περιττὸς ἀριθμὸς καὶ ὁ $2\alpha+1$ νὰ μὴ διαιρῆται ὑπὸ πρώτου ἀριθμοῦ τῆς μορφῆς $4c-1$.

Εἰς τὸ πρόβλημα V 11 ὁ περιορισμὸς εἶναι:

Διὰ νὰ ἔχῃ τὸ πρόβλημα λύσιν (νὰ ἀναλύεται δηλ. ὁ δοθεὶς ἀκέραιος εἰς ἄθροισμα τριῶν τετραγώνων) πρέπει ὁ δοθεὶς νὰ μὴ εἶναι 2 οὔτε νὰ εἶναι τῆς μορφῆς $8k+2$. (Σημ. Ὁ δεύτερος περιορισμὸς εἶναι μερικὴ περίπτωσις τῆς συνθήκης, καθ' ἣν ἀριθμὸς τῆς μορφῆς 4^{λ} $(8k+7)$ δὲν ἀναλύεται εἰς ἄθροισμα τριῶν τετραγώνων). Ἐκ τῶν περιορισμῶν τῶν προβλημάτων τούτων εἶναι φανερόν, ὅτι ὁ Διόφαντος ἐγνώριζε πότε ἀριθμός τις εἶναι δυνατὸν νὰ ἀναλύεται εἰς ἄθροισμα δύο ἢ τριῶν τετραγώνων. Ἐξ ἐνδείξεων δὲ ἐξ ἄλλων προβλημάτων τῶν 'Αριθμητικῶν του (IV 29 καὶ 30, καὶ V 14), φαίνεται, ὅτι ὁ Διόφαντος ἐγνώριζεν ὅτι πᾶς ἀριθμὸς ἀναλύεται εἰς ἄθροισμα τεσσάρων τετραγώνων. Ἀπόδειξιν τῆς τελευταίας ταύτης προτάσεως ἐπέτυχεν ὁ Lagrange [1].

Ὑπὸ τοὺς ἀνωτέρω περιορισμούς, καθ' οὓς εἶναι δυνατὴ ἡ ἀνάλυσις ἀριθμοῦ εἰς ἄθροισμα δύο ἢ τριῶν τετραγώνων, ἡ μέθοδος «Παρισότητος ἀγωγὴ» (δηλ. μέθοδος προσεγγίσεως) εὑρίσκει ἐφαρμογὴν εἰς τὰς περιπτώσεις: νὰ ἀναλυθῇ δοθεὶς ἀριθμὸς εἰς ἄθροισμα δύο τετραγώνων κατὰ προσέγγισιν ἴσων (V 9), ἢ ἄθροισμα τριῶν τετραγώνων κατὰ προσέγγισιν ἴσων (V 11).

Ἀναφέρομεν τὰ δύο συναφῆ παραδείγματα τοῦ Διοφάντου:

1ον. Νὰ ἀναλυθῇ ὁ ἀριθμὸς 13 εἰς ἄθροισμα δύο ἴσων περίπου τετραγώνων.

Λαμβάνει τὸ ἥμισυ τοῦ 13 καὶ προσθέτει εἰς τοῦτο τὸ $\frac{1}{4t^2}$, ὅπου ὁ t πρέπει νὰ προσδιορισθῇ, ὥστε ὁ $\frac{13}{2}+\frac{1}{4t^2}$ νὰ εἶναι τετράγωνος ἀριθμός, (1).

1) Demonstration d' un théorème d' arithmetique in Nouveaux Memoires de l' Academie Royal des sciences de Berlin, année 1770, Berlin 1772, p. 12—133. Oeuvres de Lagrange, III P. 187—201.

Ἐκ ταύτης εἶναι $26t^2+1$=τετράγωνος, ἔστω$=(1+5t)^2$, ἐξ ἧς $t=10$. Καὶ εἶναι ἐκ τῆς (1), $\frac{13}{2}+\frac{1}{400}=\left(\frac{51}{20}\right)^2$. Ἀλλὰ δύο τετράγωνα ἴσα, ἕκαστον τῶν ὁποίων νὰ ἔχῃ πλευρὰν $\frac{51}{20}$ ἔχουν ἄθροισμα $13+\frac{1}{200}$, ὅπερ εἶναι>13.

Ὁ $13=3^2+2^2$. Πρέπει λοιπὸν ἡ πλευρὰ τοῦ ἑνὸς τῶν ζητουμένων τετραγώνων νὰ εἶναι μεγαλυτέρα τοῦ 2, ἔστω κατὰ λ, ὁπότε διὰ νὰ εἶναι μὲν τὰ δύο τετράγωνα ἴσα, ἀλλὰ τὸ ἄθροισμάτων κατὰ προσέγγισιν ἴσον πρὸς τὸν 13 (ὀλίγον μεγαλύτερον τούτου) πρέπει ἡ πλευρὰ τοῦ ἑνὸς νὰ εἶναι $\frac{51}{20}=3-\kappa$ καὶ τοῦ ἄλλου $\frac{51}{20}=2+\lambda$. Ἐκ τῶν σχέσεων τούτων λαμβάνομεν $\kappa=\frac{9}{20}$ καὶ $\lambda=\frac{11}{20}$.

Κατὰ ταῦτα θὰ εἶναι

$$2.\left(\frac{51}{20}\right)^2=\left(3-\frac{9}{20}\right)^2+\left(2+\frac{11}{22}\right)^2=13+\frac{1}{200}.$$

Ἐνταῦθα τὰ δύο ζητούμενα τετράγωνα εἶναι ἴσα, ἀλλὰ τὸ ἄθροισμά των εἶναι κατὰ προσέγγισιν ἴσον πρὸς 13. Τὸ πρόβλημα θέλει τὰ μὲν δύο τετράγωνα νὰ εἶναι κατὰ προσέγγισιν ἴσα, τὸ δὲ ἄθροισμά των νὰ εἶναι ἀκριβῶς ἴσον πρὸς 13. Πρὸς τοῦτο ἐκφράζει τὰς πλευρὰς τῶν ζητουμένων τετραγώνων συναρτήσει βοηθητικοῦ ἀγνώστου x καὶ τῶν εὑρεθεισῶν τιμῶν $\left(3-\frac{9}{20}\right)$ καὶ $\left(2+\frac{11}{20}\right)$, ὁπότε λαμβάνει

$$(3-9x)^2+(2+11x)^2=13, \quad (2).$$

(Σημ. Ἡ παράλειψις τῶν παρονομαστῶν γίνεται διὰ νὰ ἔχῃ μικροτέρους ἀριθμούς. Τὸ ἀποτέλεσμα δὲν μεταβάλλεται).

Ἐκ τῆς (2) εἶναι $x=\frac{5}{101}$ καὶ αἱ πλευραὶ τῶν ζητουμένων τετραγώνων εἶναι

$$\frac{257}{101} \text{ καὶ } \frac{258}{101}, \text{ εἶναι δὲ } \left(\frac{257}{101}\right)^2+\left(\frac{258}{101}\right)^2=13.$$

Εἶναι λοιπὸν τὰ κατὰ προσέγγισιν ἴσα τετράγωνα, τὸ μὲν $\frac{66049}{10201}$, τὸ δὲ $\frac{66564}{10201}$ καὶ τὸ ἄθροισμά των εἶναι $=13$.

2ον. Νὰ ἀναλυθῇ ὁ ἀριθμὸς 10 εἰς ἄθροισμα τριῶν ἴσων κατὰ προσέγγισιν τετραγώνων.

Λαμβάνει $\frac{10}{3}+\frac{1}{9t^2}$ =τετράγωνος, (3), ὅπου ὁ t πρέπει νὰ προσδιορισθῇ. Ἐκ ταύτης εἶναι

$30t^2+1$=τετράγωνος, ἔστω $=(1+5t)^2$, ἐξ ἧς $t=2$ καὶ ἐκ τῆς (3) εἶναι

$$\frac{10}{3}+\frac{1}{36}=\frac{121}{36}=\left(\frac{11}{6}\right)^2.$$

Ἀλλὰ τρία τετράγωνα ἴσα, ἕκαστον τῶν ὁποίων νὰ ἔχῃ πλευρὰν $\frac{11}{6}$ εἶναι

$$3.\ \frac{121}{36}=\frac{363}{36}=10\ \frac{3}{36}>10.$$

Πρέπει λοιπὸν νὰ εὑρεθοῦν τρία τετράγωνα κατὰ προσέγγισιν ἴσα, τῶν ὁποίων ὅμως τὸ ἄθροισμα νὰ εἶναι ἀκριβῶς 10.

Ὁ $10=3^2+\frac{16}{25}+\frac{9}{25}$ ἤτοι εἶναι ἄθροισμα τριῶν τετραγώνων, τῶν ὁποίων αἱ πλευραὶ εἶναι ἀντιστοίχως $3, \frac{4}{5}, \frac{3}{5}$.

Διὰ νὰ ἀποφύγῃ τὰ κλάσματα πολ]ζει ἐπὶ 30 καὶ ἔχῃ ἀντιστοίχως 90, 24, 18 ὡς πλευρὰς τριῶν τετραγώνων καὶ $\frac{11}{6}$. 30=55 ὡς πλευράν, ἐὰν τὰ τρία τετράγωνα εἶναι ἴσα.

Πρέπει λοιπόν, λέγει ὁ Διόφαντος, ἡ πλευρὰ ἑκάστου τῶν ζητουμένων τετραγώνων νὰ κατασκευασθῇ ἐκ τῶν ἀριθμῶν 90, 24, 18 κατὰ προσέγγισιν ἴση πρὸς 55. Επειδὴ $90=55+35$, $24=55-31$, $18=55-37$, ἤτοι $55=90-35=24+31=18+37$ καὶ

$$\frac{55}{30}=3-\frac{35}{30}=\frac{4}{5}+\frac{31}{30}=\frac{3}{5}+\frac{37}{30} \text{ καὶ εἶναι}$$

$$\left(3-\frac{35}{30}\right)^2+\left(\frac{4}{5}+\frac{31}{30}\right)^2+\left(\frac{3}{5}+\frac{37}{30}\right)^2=\frac{363}{36} > 10,$$

πρέπει οἱ δεύτεροι ὅροι ἑκάστου τῶν δυωνύμων τοῦ α'. μέλους νὰ μεταβληθῶσιν, ὥστε τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν τετραγώνων νὰ εἶναι ἀκριβῶς 10. Πρὸς τοῦτο σχηματίζει τὴν ἐξίσωσιν

$$(3-35x)^2+\left(\frac{4}{5}+31x\right)^2+\left(\frac{3}{5}+37x\right)^2=10.$$

Ἐκ ταύτης εἶναι $x=\frac{116}{3555}$ καὶ τὰ ζητούμενα τρία τετράγωνα εἶναι

$$\left(\frac{6605}{3555}\right)^2+\left(\frac{6440}{3555}\right)^2+\left(\frac{6425}{3555}\right)^2=10.$$

II

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω παραδειγμάτων τοῦ Διοφάντου καὶ ἐκ τῆς σπουδῆς πολλῶν συναφῶν περιπτώσεων συνάγομεν τὰ ἑξῆς συμπεράσματα.

II 1

Δυνάμεθα πάντοτε νὰ προσδιορίσωμεν τετράγωνόν τινα, ὥστε τὸ ἀντίστροφον τούτου προστιθέμενον εἰς δοθέντα ἀκέραιον νὰ καθιστᾷ τοῦτον τετράγωνον.

Ἔστω ὁ δοθεὶς ἀκέραιος α καὶ ὁ ζητούμενος τετράγωνος t^2, ὁπότε θὰ εἶναι

$\alpha+\frac{1}{t^2}=$τετράγωνος, (1). Ἐκ ταύτης εἶναι $\alpha t^2+1=$τετράγωνος.

Τὸν τετράγωνον τοῦτον δυνάμεθα νὰ θέσωμεν $=(1+\kappa t)^2$ ὅπου $\kappa^2<\alpha$.

ἢ $=(1-\lambda t)^2$, ὅπου $\lambda^2>\alpha$.

Ἀριθμητικὸν παράδειγμα

α) $7+\frac{1}{t^2}=$τετράγωνος, (2), ἢ $7t^2+1=$τετράγωνος$=(1+2t)^2$ ἐξ ἧς $t=\frac{4}{3}$ καὶ ἐκ τῆς (2) εἶναι $7+\frac{9}{16}=\left(\frac{11}{4}\right)^2$.

β) $7t^2+1=(1-3t)^2$, ἐξ ἧς $t=3$ καὶ ἐκ τῆς (2) εἶναι $7+\frac{1}{9}=\frac{64}{9}=\left(\frac{8}{3}\right)^2$.

II 2

Δυνάμεθα πάντοτε νὰ προσδιορίσωμεν τετράγωνόν τινα (t^2), ὥστε ἡ παράστασις

$\frac{\alpha}{n}+\frac{1}{n^2t^2}$ νὰ εἶναι =τετράγωνος, (1), (α δοθεὶς ἀκέραιος ἀριθμὸς καὶ $n=2, 3, 4\ldots$).

Ἐκ τῆς (1) εἶναι

$$\alpha n t^2+1=\text{τετράγωνος, ἔστω}=(1+\varkappa t)^2,\ \text{ὅπου}\ \varkappa^2<\alpha n\ \text{ἢ}\ =(1-\lambda t)^2,\ \text{ὅπου}\ \lambda^2>\alpha n.$$

Ἀριθμητικὸν παράδειγμα

α) $\frac{11}{5}+\frac{1}{25t^2}=$τετράγωνος, (2) ἢ $55t^2+1=$ τετράγωνος, ἔστω $=(1+7t)^2$, ἐξ ἧς $t=\frac{7}{3}$ καὶ ἐκ τῆς (2) εἶναι $\frac{11}{5}+\frac{9}{25\,.\,49}=\frac{2704}{1225}=\left(\frac{52}{35}\right)^2$.

β) $55t^2+1=$τετράγωνος, ἔστω$=(1-8t)^2$, ἐξ ἧς $t=\frac{16}{9}$ καὶ ἐκ τῆς (2) εἶναι

$$\frac{11}{5}+\frac{81}{25.256}=\frac{14161}{6400}=\left(\frac{119}{80}\right)^2.$$

II 3.

Ἐφ' ὅσον πᾶς ἀκέραιος ἀριθμὸς ἀναλύεται εἰς ἄθροισμα τεσσάρων, πέντε, ἕξ . . . ν τετραγώνων, εἶναι δυνατὸν νὰ ἀναλυθῇ καὶ εἰς ἄθροισμα 4, 5, 6 . . . ν τετραγώνων, κατὰ προσέγγισιν ἴσων, διὰ τῆς ἐφαρμογῆς τῆς μεθόδου προσεγγίσεως τοῦ Διοφάντου, ἀφοῦ καταστήσωμεν τὸν δοθέντα ἀριθμὸν α τετράγωνον δυνάμει τῆς σχέσεως II 2.

Ἀριθμητικὸν παράδειγμα

Νὰ ἀναλυθῇ ὁ ἀριθμὸς 35 εἰς ἄθροισμα τεσσάρων τετραγώνων κατὰ προσέγγισιν ἴσων.

Κατὰ τὴν σχέσιν II 2 θὰ ἔχωμεν $\frac{35}{4}+\frac{1}{16t^2}=$τετράγωνος, (1). Ἐκ ταύτης εἶναι

$$140t^2+1=\text{τετράγωνος, ἔστω}=(1-12t)^2,\ \text{ἐξ ἧς}\ t=6,$$

καὶ ἐκ τῆς (1) εἶναι

$$\frac{35}{4}+\frac{1}{16\,.\,36}=\frac{5041}{576}=\left(\frac{71}{24}\right)^2.$$

Ὁ 35 ἀναλύεται εἰς ἄθροισμα τεσσάρων τετραγώνων, τῶν $1^2+3^2+3^2+4^2$. Ἐκ τῶν τεσσάρων ἴσων τετραγώνων, εἰς τὰ ὁποῖα ζητεῖται νὰ ἀναλυθῇ ὁ 35, τὸ πρῶτον θὰ ἔχῃ πλευρὰν μεγαλυτέραν τῆς μονάδος καὶ <3, ἕκαστον δὲ τῶν λοιπῶν τριῶν πρέπει νὰ εἶναι <3. Ἤτοι ἡ πλευρὰ τοῦ πρώτου τετραγώνου θὰ σχηματισθῇ, ἐὰν εἰς τὴν μονάδα προστεθῇ κάτι, ἔστω ϰ, ἡ πλευρὰ τοῦ δευτέρου καὶ τρίτου τετραγώνου θὰ σχηματισθῇ, ἐὰν ἐκ τοῦ 3 ἀφαιρεθῇ κάτι, ἔστω λ, καὶ ἡ πλευρὰ τοῦ τετάρτου τετραγώνου θὰ σχηματισθῇ, ἐὰν ἐκ τοῦ 4 ἀφαιρεθῇ κάτι, ἔστω μ, ὁπότε θὰ ἔχωμεν τὰς σχέσεις

$$\frac{71}{24}=1+\varkappa=3-\lambda=3-\lambda=4-\mu.$$

Ἐκ τῶν σχέσεων τούτων λαμβάνομεν

$$\varkappa=\frac{47}{24},\quad \lambda=\frac{1}{24},\quad \mu=\frac{25}{24}.$$

Ἀλλὰ τέσσαρα τετράγωνα ἴσα, ἕκαστον τῶν ὁποίων νὰ ἔχῃ πλευρὰν $\frac{71}{24}$ ἔχουν ἄθροισμα 4. $\left(\frac{71}{24}\right)^2=\frac{20164}{576}=35\frac{4}{576}$, ὅπερ εἶναι >35. Διὰ νὰ εἶναι τὰ ζητούμενα τέσσαρα τετράγωνα κατὰ προσέγγισιν ἴσα, ἀλλὰ τὸ ἄθροισμά των νὰ εἶναι ἀκριβῶς ἴσον πρὸς 35 ἐκφράζομεν τὰς πλευρὰς τούτων, κατὰ τὴν μέθοδον τοῦ Διοφάντου, συναρτήσει ἀγνώστου τινος x καὶ τῶν τιμῶν τῶν $\varkappa$, λ, μ, ὁπότε θὰ ἔχωμεν

$$(1+47x)^2+(3-x)^2+(3-x)^2+(4-25x)^2=35, \quad (2).$$

(Σημ. Ἡ ἐξίσωσις ἠδύνατο νὰ εἶναι

$$\left(1+\frac{47}{24}x\right)^2+\left(3-\frac{x}{24}\right)^2+\left(3-\frac{x}{24}\right)^2+\left(4-\frac{25}{24}x\right)^2=35.$$

Ἐκ τῆς παραλείψεως τῶν παρονομαστῶν τὸ ἀποτέλεσμα δὲν μεταβάλλεται· λαμβάνονται μόνον μικρότεροι ἀριθμοί).

Ἐκ τῆς (2) εἶναι $x=\frac{59}{1418}$ καὶ δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν (2) λαμβάνομεν τὰ ζητούμενα 4 τετράγωνα

$$\left(\frac{4191}{1418}\right)^2+\left(\frac{4195}{1418}\right)^2+\left(\frac{4195}{1418}\right)^2+\left(\frac{4197}{1418}\right)^2=35.$$

SUMMARY

A few remarks on the method ΠΑΡΙΣΟΤΗΤΟΣ ΑΓΩΓΗ of Diophantus (Method of approximation to limits).

From studying the problems V 9, 11 of the Arithmetica of Diophantus we conclude the following :

II 1.

We can always define a square t^2 so that the converse of that, when additioned to a given whole number, to make that square.

Let a be the given whole number and t^2 the square we want to find. Then $a+\frac{1}{t^2}=$square, (1). From this relation we have $at^2+1=$ square. We can write this square$=(1+\varkappa t)^2$, with $\varkappa^2<a$ or$=(1-\lambda t)^2$, with $\lambda^2>a$.

Examble

a) $7+\frac{1}{t^2}$=square, (2), or $7t^2+1$=square, let$=(1+2t)^2$, then $t=\frac{4}{3}$ and from the (2) we have $7+\frac{9}{16}=\left(\frac{11}{4}\right)^2$.

b) $7t^2+1=(1-3t)^2$, then $t=3$ and from the (2) we have

$$7+\frac{1}{9}=\left(\frac{8}{3}\right)^2.$$

II 2.

We can always define a square t^2, so that the representation $\frac{a}{n}+\frac{1}{n^2t^2}$ to be a square number, (1), (a is the given whole number and

$n=2, 3, 4 \ldots$).

From the (1) we have ant^2+1=square. Let it be $=(1+\varkappa t)^2$, with $\varkappa^2<an$ or$=(1-\lambda t)^2$, with $\lambda^2>an$.

Examble

a) $\frac{11}{5}+\frac{1}{25t^2}$ =square. (2) or $55t^2+1$=square.

Let it be$=(1+7t)^2$, then $t=\frac{7}{3}$ and from the (2) we have

$$\frac{11}{5}+\frac{9}{25\,.\,49}=\frac{2704}{1225}=\left(\frac{52}{35}\right)^2.$$

b) $55t^2+1$=square, let it be $=(7-8t)^2$, $t=\frac{16}{9}$ and from (2) we have

$$\frac{11}{5}+\frac{81}{25\,.\,256}=\frac{14161}{6400}=\left(\frac{119}{80}\right)^2.$$

II 3.

While every whole number is analysed to a sum of four, five, six, . . , ν squares, is also possible to be analysed to a sum of 4, 5, 6 . . , ν squares, appoximately equal, by the application of the method of appoximation of Diophantus, after we have made the given number a square according to the relation II 2.

Examble

To be analysed the number 35 in four approximately equal squares.

With respect to the II 2 we will have $\frac{35}{4}=\frac{1}{16t^2}$ =square, (1). From this relation we have $140t^2+1$=square, let it be$=(1-12t)^2$, then $t=6$, and from the (1) we have

$$\frac{35}{4}+\frac{1}{16\,.\,36}=\frac{5041}{576}=\left(\frac{71}{24}\right)^2.$$

The number 35 is analysed to a sum of four squares that is of

$$1^2+3^2+3^2+4^2.$$

The number 35 must be analysed to a sum of four squares, each of them has a side about equal to $\frac{71}{24}$. The side of the first of the required squares will be larger of 1 and smaller of 3, the side of other three squares will be smaller of 3 i. e. if the 4 squares are equal we will have as side of each of them the following

$$\frac{71}{24}=1+\varkappa=3-\lambda=3-\lambda=4-\mu.$$

From the above relations we have

$$\varkappa=\frac{47}{24},\ \lambda=\frac{1}{24},\ \mu=\frac{25}{24}.$$

But four equal squares, each of them has as side $\frac{71}{24}$, have a sum $4\cdot\left(\frac{71}{24}\right)^2=\frac{20164}{576}=35\frac{4}{576}$, thus >35. In order to be the required squares approximately equal, with their sum exactly equal to 35, we express the sides of them according to the method of Diophantus. Then we have

$$(1+47x)^2+(3-x)^2+(3-x)^2+(4-25x)^2=35, \quad (2).$$

From this relation we find $x=\frac{59}{1418}$ and by substituting in the (2) we take the required four squares

$$\left(\frac{4191}{1418}\right)^2+\left(\frac{4195}{1418}\right)^2+\left(\frac{4195}{1418}\right)^2+\left(\frac{4197}{1418}\right)^2=35.$$

BIBLIOGRAPHY

T. L. Heath, Diophantus of Alexandria (95—98), Cambridge 1910.

T. Nagell, Introduction to Number Theory (John Wiley, New York 1951).

O. Ore, Number Theory and his History (Mc Graw - Hill, New York 1948).

J. V. Uspensky and M. A. Heaslet, Elementary Number Theory (Mc Graw - Hill, New York 1939).

H. Davenport, The Higher Arithmetik, Hutchinson's University Library, London 1952).

E. Cahen, Théorie des nombres, Hermann, Paris 1924.

P. Bachmann, Niedere Zahlentheorie, B. C. Teubner, Leipzig; Vol. I, 1920 Vol. II, 1910.

E. Bessel-Hagen, Zahlentheorie (Pascals Repertorium, Vol. I, Teil 3; B. C. Teubner, Leipzig 1929).

F. T. Poselger, Beiträge zur unbestimmten Analysis, Abh. der Akad. d. Wiss. zu Berlin 1832, Berlin 1834.

M. Kraitchic, Théorie des nombres, I, II, Paris 1922, 1926.