ΕΥΑΓΓΕΛΟΥ Σ. ΣΤΑΜΑΤΗ

ΕΠΙ ΤΩΝ ΟΡΙΣΜΩΝ 17 ΚΑΙ 18 ΤΟΥ 5ου ΒΙΒΛΙΟΥ ΤΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΤΟΥ ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΚΑΙ ΤΟΥ ΟΡΟΥ "ΔΙ' ΙΣΟΥ"

Οἱ ὁρισμοὶ 17 καὶ 18 τοῦ 5ου Βιβλίου τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου ἔχουσιν ὡς ἑξῆς :

Ὁρισμὸς 17

Δι' ἴσου λόγος εἶναι, ἐὰν ὑπάρχωσι πολλὰ μεγέθη καὶ ἄλλα ἴσα κατὰ τὸ πλῆθος πρὸς αὐτά, λαμβανόμενα δὲ ἀνὰ δύο εἶναι εἰς τὸν αὐτὸν λόγον, ὅταν ὁ λόγος τοῦ πρώτου πρὸς τὸ τελευταῖον εἰς τὰ πρῶτα μεγέθη εἶναι ἴσος πρὸς τὸν λόγον τοῦ πρώτου πρὸς τὸ τελευταῖον εἰς τὰ δεύτερα μεγέθη· ἢ ἄλλως· λῆψις τῶν ἄκρων καθ' ὑπεξαίρεσιν τῶν μέσων.

Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦτον καὶ τὸ θεώρημα V, 22, ἐὰν δοθῶσιν αἱ δύο γεωμετρικαὶ ἀκολουθίαι, τοῦ αὐτοῦ πλήθους ὅρων ἑκατέρα, τῆς μορφῆς α, αρ, αρλ, αρλμ . . . . καὶ β, βρ, βρλ, βρλμ . . . . ὅπου εἶναι

$$\frac{\alpha}{\alpha\rho} = \frac{\beta}{\beta\rho} \qquad (1)$$

$$\frac{\alpha\rho}{\alpha\rho\lambda} = \frac{\beta\rho}{\beta\rho\lambda} \qquad (2)$$

$$\frac{\alpha\rho\lambda}{\alpha\rho\lambda\mu} = \frac{\beta\rho\lambda}{\beta\rho\lambda\mu} \qquad (3)$$

«δι' ἴσου λόγος» εἶναι ἡ σχέσις $\frac{\alpha}{\alpha\rho\lambda\mu} = \frac{\beta}{\beta\rho\lambda\mu}$, (4), ἡ ὁποία λαμβάνεται διὰ πολλαπλασιασμοῦ τῶν ἰσοτήτων (1, 2, 3) κατὰ μέλη. Εἰς τὸ θεώρημα 22 τοῦ 5ου Βιβλίου τῶν Στοιχείων γίνεται ἀπόδειξις τῆς σχέσεως (4), διότι ὁ Εὐκλείδης περιλαμβάνει κατ' αὐτὴν καὶ τὴν περίπτωσιν, καθ' ἣν οἱ ὅροι τῶν κλασμάτων αὐτῆς εἶναι ἀσύμμετροι ἀριθμοί.

Εἴς τι χειρόγραφον τῶν Στοιχείων ὁ «δι' ἴσου λόγος» τοῦ ὁρισμοῦ 17 ὀνομάζεται τεταγμένη ἀναλογία (II τόμος τῆς κατὰ I. L. Heiberg ἐκδόσεως τῶν Στοιχείων, σελὶς 7). Φαίνεται λίαν πιθανόν, ὅτι ἡ ὀνομασία αὕτη εἶναι γνησία καὶ ὅτι ὁ «δι' ἴσου λόγος» (ἀναλογία) θὰ ἐχαρακτηρίσθη ὑπὸ τοῦ Εὐκλείδου ὡς «τεταγμένη ἀναλογία» πρὸς διάκρισιν τῶν δύο σχέσεων τοῦ ὁρισμοῦ 18, αἵτινες ὀνομάζονται τεταραγμένη ἀναλογία.

Ὁρισμὸς 18

Τεταραγμένη δὲ ἀναλογία εἶναι, ὅταν, ἐν ᾧ ὑπάρχουσι τρία μεγέθη καὶ ἄλλα ἴσα κατὰ τὸ πλῆθος πρὸς αὐτά, γίνηται ὡς μὲν εἰς τὰ πρῶτα μεγέθη ἡγούμενον πρὸς ἑπόμενον, οὕτως εἰς τὰ δεύτερα μεγέθη ἡγούμενον πρὸς ἑπόμενον, ὡς δὲ εἰς τὰ πρῶτα μεγέθη ἑπόμενον πρὸς ἄλλο τι, οὕτως εἰς τὰ δεύτερα ἄλλο τι πρὸς ἡγούμενον.

Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦτον καὶ τὸ θεώρημα V, 23, ἐὰν δοθῶσιν αἱ ἀκολουθίαι Α, Β, Γ καὶ Δ, Ε, Ζ ὅπου εἶναι

$$\frac{Α}{Β} = \frac{Ε}{Ζ}, \quad (1)$$

$$\frac{Β}{Γ} = \frac{Δ}{Ε}, \quad (2)$$

αἱ σχέσεις (1, 2) ὀνομάζονται «τεταραγμένη ἀναλογία».

Ὁ ὅρος «δι' ἴσου»

Τὸν ὅρον «δι' ἴσου» συναντῶμεν εἰς τὰ κάτωθι 17 θεωρήματα τῶν Στοιχείων:

Πέμπτου Βιβλίου : 22, 23, 24 (δίς).
Ἕκτου » : 4, 20 (δίς), 22, 23, 24.
Ἑβδόμου » : 14.
Ὀγδόου » : 1, 5, 6, 8, 13, 21.
Ἐνάτου » : 19, 36 (δίς).

Εἰς τὰ 15 ἐξ αὐτῶν (πλὴν τῶν V, 23. VII, 14), ἀφοῦ δίδονται δύο γεωμετρικαὶ ἀκολουθίαι, τοῦ αὐτοῦ πλήθους ὅρων ἑκατέρα, αἱ Α, Β, Γ,.... καὶ Δ, Ε, Ζ,... ὅπου εἶναι

$$\frac{Α}{Β} = \frac{Δ}{Ε} = ρ \quad (1)$$

$$\frac{Β}{Γ} = \frac{Ε}{Ζ} = λ \quad (2)$$

συνάγεται πάντοτε «δι' ἴσου ἄρα» εἶναι $\frac{Α}{Γ} = \frac{Δ}{Ζ}$.

Εἰς τὸ θεώρημα 23 τοῦ 5ου Βιβλίου δίδονται δύο ἀκολουθίαι ἐκ τριῶν ὅρων ἑκατέρα, αἱ Α, Β, Γ, καὶ Δ, Ε, Ζ, ὅπου εἶναι

$$\frac{Α}{Β} = \frac{Ε}{Ζ} = η$$

$$\frac{Β}{Γ} = \frac{Δ}{Ε} = θ$$

καὶ συνάγεται πάλιν ὅτι «καὶ δι' ἴσου» θὰ εἶναι εἰς τὸν αὐτὸν λόγον, ἤτοι

$$\frac{Α}{Γ} = \frac{Δ}{Ζ}.$$

Πρὸς κατανόησιν τοῦ ὅρου «δι' ἴσου» ἀναγράφομεν κατωτέρω ἐν συντομίᾳ τὰ θεωρήματα 22 καὶ 23 τοῦ 5ου Βιβλίου.

V, 22

Ἐὰν ὑπάρχωσιν ὁσαδήποτε μεγέθη καὶ ἄλλα ἴσα κατὰ τὸ πλῆθος πρὸς αὐτά, λαμβανόμενα δὲ ἀνὰ δύο εἶναι εἰς τὸν αὐτὸν λόγον, καὶ δι' ἴσου θὰ εἶναι εἰς τὸν αὐτὸν λόγον.

Ἔστω ὁσαδήποτε μεγέθη τὰ Α, Β, Γ .... καὶ Δ, Ε, Ζ .... τοῦ αὐτοῦ πλήθους ὅρων πρὸς τὰ πρῶτα καὶ

$$\frac{Α}{Β} = \frac{Δ}{Ε} = α \quad (1)$$

$$\frac{Β}{Γ} = \frac{Ε}{Ζ} = β \quad (2).$$

Λέγω, ὅτι καὶ δι' ἴσου θὰ εἶναι εἰς τὸν αὐτὸν λόγον.

Ἂς ληφθῇ Η=Αρ, Θ=Δρ, Κ=Βλ, Λ=Ελ, Μ=Γμ, Ν=Ζμ, (3).

Ἐκ τῶν σχέσεων (1, 2, 3) λαμβάνομεν

$$\frac{Αρ}{Βλ}=\frac{Δρ}{Ελ} \quad (4)$$

$$\frac{Βλ}{Γμ}=\frac{Ελ}{Ζμ} \quad (5).$$

Δι' ἴσου ἄρα εἶναι $\frac{Αρ}{Γμ}=\frac{Δρ}{Ζμ}$. Ἐὰν δὲ εἶναι $Αρ \gtreqless Γμ$ καὶ συγχρόνως $Δρ \gtreqless Ζμ$ θὰ εἶναι κατὰ τὸν ὁρισμὸν 5 τοῦ 5ου Βιβλίου καὶ $\frac{Α}{Γ}=\frac{Δ}{Ζ}$:

V, 23

Ἐὰν ὑπάρχωσι τρία μεγέθη καὶ ἄλλα ἴσα κατὰ τὸ πλῆθος πρὸς αὐτά, λαμβανόμενα δὲ ἀνὰ δύο εἶναι εἰς τὸν αὐτὸν λόγον, εἶναι δὲ τεταραγμένη ἡ ἀναλογία αὐτῶν, καὶ δι' ἴσου θὰ εἶναι εἰς τὸν αὐτὸν λόγον.

Ἔστωσαν τὰ μεγέθη Α, Β, Γ καὶ Δ, Ε, Ζ, τοιαῦτα, ὥστε νὰ εἶναι

$$\frac{Α}{Β}=\frac{Ε}{Ζ} \quad (1)$$

$$\frac{Β}{Γ}=\frac{Δ}{Ε} \quad (2)$$

ἤτοι ἡ ἀναλογία αὐτῶν νὰ εἶναι τεταραγμένη. Λέγω, ὅτι εἶναι $\frac{Α}{Γ}=\frac{Δ}{Ζ}$ (δηλ. οἱ δι' ἴσου λόγοι θὰ εἶναι ἴσοι).

Λαμβάνει Η=Αρ, Θ=Βρ, Λ=Γλ, Κ=Δρ, Μ=Ελ, Ν=Ζλ καὶ ἀποδεικνύει, ὅτι εἶναι

$$\frac{Η}{Θ}=\frac{Μ}{Ν}=α \qquad \frac{Αρ}{Βρ}=\frac{Ελ}{Ζλ}=α$$

ἢ

$$\frac{Θ}{Λ}=\frac{Κ}{Μ}=β \qquad \frac{Βρ}{Γλ}=\frac{Δρ}{Ελ}=β$$

ἐπάγεται δὲ ὅτι «καὶ δι' ἴσου» εἶναι

$$\frac{Αρ}{Γλ}=\frac{Δρ}{Ζλ}.$$

Ἐὰν δὲ εἶναι $Αρ \gtreqless Γλ$ καὶ συγχρόνως $Δρ \gtreqless Ζλ$ θὰ εἶναι κατὰ τὸν ὁρισμὸν 5 τοῦ 5ου Βιβλίου καὶ $\frac{Α}{Γ}=\frac{Δ}{Ζ}$.

Εἰς τὰ θεωρήματα V, 22, 23, VII 14 ἀποδεικνύεται πότε οἱ «δι' ἴσου» λαμβανόμενοι λόγοι εἶναι ἴσοι. Εἰς τὰ λοιπὰ θεωρήματα τῶν Βιβλίων V, VI, VIII, IX, τὰ μνημονευόμενα ἀνωτέρω, γίνεται ἁπλῶς ἐφαρμογὴ τοῦ ὅρου δι' ἴσου. Ἐνδεικτικῶς ἀναφέρομεν τὸ συναφὲς μέρος τοῦ 4ου θεωρήματος τοῦ VI Βιβλίου. Εἰς τοῦτο ὁ Εὐκλείδης σχηματίζει τὰς δύο ἀκολουθίας ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ καὶ ΔΓ, ΓΕ, ΕΔ, ὅπου εἶναι

$$\frac{ΑΒ}{ΒΓ}=\frac{ΔΓ}{ΓΕ}=ρ$$

$$\frac{ΒΓ}{ΓΑ}=\frac{ΓΕ}{ΕΔ}=λ$$

καὶ ἐπάγεται «δι' ἴσου ἄρα» εἶναι $\frac{ΑΒ}{ΓΑ}=\frac{ΔΓ}{ΕΔ}$.

Ἐκ τῶν προηγουμένως ἐκτεθέντων καθίσταται φανερόν, ὅτι ὁ ὅρος «δι' ἴσου» σημαίνει τὸν σχηματισμὸν τῶν λόγων τῶν ἄκρων ὅρων δύο δοθεισῶν ἀκολουθιῶν. Ὡς πρὸς τὰς ἀκολουθίας αὐτὰς διακρίνομεν δύο περιπτώσεις :

1) Ὅταν αὗται εἶναι γεωμετρικαί, ἔχωσι τὸ αὐτό πλῆθος ὅρων καὶ ἔχωσι σχηματισθῆ κατὰ τὸν αὐτὸν νόμον. Αὗται εἶναι τῆς μορφῆς α, αρ, αρλ, αρλμ . . . . καὶ β, βρ, βρλ, βρλμ . . . . Δι' ἴσου νοοῦνται πάντοτε οἱ λόγοι τῶν ἄκρων ὅρων ἑκατέρας ἀκολουθίας, οἱ $\frac{\alpha}{\alpha\rho\lambda\mu}$, $\frac{\beta}{\beta\rho\lambda\mu}$. Εἶναι δὲ πάντοτε εἰς τὰς ἀκολουθίας αὐτὰς κατὰ τὸ V, 22 $\frac{\alpha}{\alpha\rho\lambda\mu} = \frac{\beta}{\beta\rho\lambda\mu}$.

Φαίνεται πιθανόν, ὅτι ὁ ὅρος «δι' ἴσου» ἔχει προέλθει ἐκ τοῦ γεγονότος, ὅτι σχηματίζονται οἱ λόγοι τῶν ἄκρων ὅρων διὰ παραραλείψεως μεταξὺ τούτων ἴσου πλήθους ὅρων εἰς ἑκατέραν τῶν ἀκολουθιῶν.

2) Ὅταν ἑκατέρα τῶν δοθεισῶν ἀκολουθιῶν ἔχῃ μόνον τρεῖς ὅρους, τοὺς Α, Β, Γ καὶ Δ, Ε, Ζ καὶ εἶναι:

$$\frac{A}{B} = \frac{E}{Z} = \eta \qquad (1)$$

$$\frac{B}{\Gamma} = \frac{\Delta}{E} = \theta \qquad (2)$$

ἤτοι ἡ ἀναλογία (δηλ. αἱ σχέσεις 1, 2) εἶναι τεταραγμένη. Καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν «δι' ἴσου» νοοῦνται οἱ λόγοι τῶν ἄκρων ὅρων τῶν ἀκολουθιῶν, οἱ $\frac{A}{\Gamma}$, $\frac{\Delta}{Z}$.

Εἶναι δὲ πάντοτε $\frac{A}{\Gamma} = \frac{\Delta}{Z}$ κατὰ τὸ θεώρημα 23 τοῦ 5ου Βιβλίου.

Παρατήρησις. Κατὰ τὴν ἐκφώνησιν τοῦ 3ου θεωρήματος τοῦ 5ου Βιβλίου, ἐὰν Α=Βρ, (1), Γ=Δρ, (2), ΕΖ=Αλ, (3), ΗΘ=Γλ, (4) «καὶ δι' ἴσου τῶν ληφθέντων» θὰ εἶναι ΕΖ=Βρλ, (5), ΗΘ=Δρλ, (6).

Ἡ ἀπόδειξις ἔχει ὡς ἑξῆς :

Ἔστω	ΕΖ=ΕΚ+ΚΖ+. . .	=Α +Α +. . . =Αλ
Ἐκ ταύτης καὶ τῆς (1) εἶναι	ΕΖ=	=Βρ+Βρ+. . . =Βρλ ἢ (5).
Ἔστω ἐπίσης	ΗΘ=ΗΛ+ΛΘ+. . .	=Γ +Γ +. . . =Γλ
Ἐκ ταύτης καὶ τῆς (2) εἶναι	ΗΘ=	=Δρ+Δρ+. . .=Δρλ, ἢ (6).

Ὁ ὅρος «δι' ἴσου τῶν ληφθέντων», δὲν μνημονεύεται διόλου εἰς τὴν ἀπόδειξιν τοῦ θεωρήματος. Ἐκ τῆς ἀποδείξεως ὅμως αὐτοῦ συνάγομεν, ὅτι διὰ τοῦ ὅρου «δι' ἴσου τῶν ληφθέντων» νοεῖται ἡ ἰσότης τῶν πολλαπλασίων ρλ τῶν σχέσεων (5, 6). Ὅθεν ὀρθῶς, φρονοῦμεν, γράφει ὁ J. L. Heiberg, ὅτι ὁ ὅρος «δι' ἴσου τῶν ληφθέντων» δὲν ἔχει σχέσιν πρὸς τὸν «δι' ἴσου λόγον» τοῦ ὁρισμοῦ 17, (Hic non proprie ad definitionem rationis δι' ἴσου (17) respicitur).

ZUSAMMENFASSUNQ

Über die Definitionen 17 und 18 des V. Buches der Elemente Euklids und über den Terminus «durch Gleichheit» (δι' ἴσου, ex aequo).

Es werden die Definitionen 17 und 18 in Zusammenhang mit den Sätzen V, 22, 23, erklärt. Ferner wird der Terminus «durch Gleichheit» folgendermassen erläutert: Es werden zwei Folgen mit je derselben Gliederanzahl gegeben. Die Bildung der Verhältnisse der äusseren Glieder jeder Folge heisst «δι' ἴσου» (ex aequo). Was die Folgen selbst betrifft, so underscheidcn sich zwei Fälle: 1) Die Folgen sind geometrische, haben dieselbe Gliederanzahl und sind von der Form α, $\alpha\varrho$, $\alpha\varrho\lambda$, $\alpha\varrho\lambda\mu$ .... und β, $\beta\varrho$, $\beta\varrho\lambda$, $\beta\varrho\lambda\mu$, ... Bei diesen Folgen werden, «durch Gleichheit» die Verhältnisse der äusseren Glieder $\frac{\alpha}{\alpha\varrho\lambda\mu}$, $\frac{\beta}{\beta\varrho\lambda\mu}$ verstanden. Diese sind immer gleich gemäs dem Satz V, 22. 2) Jede von den zwei gegebenen Folgen hat nur drei Glieder, A, B, Γ und Δ, E, Z, wobei $\frac{A}{B}=\frac{E}{Z}=\eta$, (1) und $\frac{B}{\Gamma}=\frac{\Delta}{E}=\vartheta$, (2) ist, d. h. die Proportion (die Beziehungen 1, 2) eine ungeordnete Proportion ist. Auch hier werden «durch Gleichheit» die Verhältnisse $\frac{A}{\Gamma}$, $\frac{\Delta}{Z}$ verstanden. Diese sind immer gleich gemäss dem Satz v, 23.

Dem Terminus «durch Gleichheit» begegnen wir bei den folgenden 17 Sätzen der Elemeute: V, 22, 23, 24 (zweimal). VI, 4, 20 (zweimal). 22, 23, 24. VII, 14. VIII, 1, 5, 6, 8, 13, 21. IX, 19, 36 (zweimal).

Anmerkung. Nach der Verlautbarung des Satzes V, 3, wenn $A=B\varrho$, $\Gamma=\Delta\varrho$, $EZ=A\lambda$, $H\Theta=\Gamma\lambda$ ist, wird «durch Gleichheit der genommenen» (Glieder), $EZ=B\varrho\lambda$, $H\Theta=\Delta\varrho\lambda$.

Der Terminus «durch Gleichheit der genommenen» (Glieder), wird gar nicht im Beweise erwähnt. Wir schliessen, dass mit diesem Terminus die Gleichheit der Vielfache $\varrho\lambda$ verstanden ist.