ΕΥΑΓΓΕΛΟΥ Σ. ΣΤΑΜΑΤΗ

ΓΕΝΙΚΕΥΣΙΣ ΕΝΟΣ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ ΤΟΥ ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ

1. Ὁ Ἀρχιμήδης εἰς τὸ 23ον θεώρημα τῆς πραγματείας αὐτοῦ Τετραγωνισμὸς παραβολῆς ἀποδεικνύει ὅτι:

Ἐὰν δοθῶσιν ἐν συνεχείᾳ ὅροι τινὲς φθινούσης γεωμετρικῆς προόδου ἐχούσης λόγον $\frac{1}{4}$, τὸ ἄθροισμα τῶν δοθέντων ὅρων σὺν τῷ $\frac{1}{3}$ τοῦ μικροτέρου ὅρου ἰσοῦται πρὸς $\frac{3}{4}$ τοῦ μεγαλυτέρου ὅρου.

Ὁ Ἀρχιμήδης λαμβάνει τὴν φθίνουσαν γεωμετρικὴν πρόοδον

$$A+\frac{A}{4}+\frac{A}{4^2}+\frac{A}{4^3}+\frac{A}{4^4},$$

ὅπου A εἶναι ὁ μεγαλύτερος ὅρος καὶ $\frac{A}{4^4}$ ὁ μικρότερος, καὶ ἀποδεικνύει ὅτι

$$A+\frac{A}{4}+\frac{A}{4^2}+\frac{A}{4^3}+\frac{A}{4^4}+\frac{1}{3}\cdot\frac{A}{4^4}=\frac{4}{3}A,$$

χωρὶς νὰ χρησιμοποιῇ τὴν ἔννοιαν τοῦ ἀπείρου.

Τὸ ἀρχιμήδειον θεώρημα εἶναι ταὐτόσημον πρὸς τὸ θεώρημα, καθ' ὃ τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων τῆς φθινούσης γεωμετρικῆς προόδου

$$S=A+\frac{A}{4^2}+\frac{A}{4^3}+\cdots+\frac{A}{4^{\nu-1}} \quad \text{εἶναι} \quad \frac{4}{3}A, \quad \text{ὅταν} \quad \nu\to\infty.$$

Κατωτέρω ἀποδεικνύεται διὰ τῆς αὐτῆς ἀρχιμηδείου ἀποδείξεως ὅτι:

Ἐὰν δοθῶσιν ἐν συνεχείᾳ ὅροι τινὲς φθινούσης γεωμετρικῆς προόδου ἐχούσης λόγον $\frac{1}{n}$, ($n=2, 3, 4 \ldots$), τὸ ἄθροισμα τῶν δοθέντων ὅρων σὺν τῷ $\frac{1}{n-1}$ τοῦ μικροτέρου ὅρου ἰσοῦται πρὸς $\frac{n}{n-1}$ τοῦ μεγαλυτέρου ὅρου.

Ἔστω ἐπὶ παραδείγματι ὅτι ἐδόθησαν οἱ ἐν συνεχείᾳ ὅροι τῆς φθινούσης γεωμετρικῆς προόδου

$$A+\frac{A}{n}+\frac{A}{n^2}+\frac{A}{n^3}, \quad (n=2, 3, 4, \ldots).$$

Κατὰ τὴν γενίκευσιν τῆς ἀρχιμηδείου ἀποδείξεως θὰ εἶναι

$$S=A+\frac{A}{n}+\frac{A}{n^2}+\frac{A}{n^3}+\frac{1}{n-1}\cdot\frac{A}{n^3}=\frac{nA}{n-1}, \quad \left(=\frac{A}{1-\frac{1}{n}}\right)$$

Τὸ ἄθροισμα ὅμως τοῦτο, εἰς τὴν εὕρεσιν τοῦ ὁποίου δὲν χρησιμοποιεῖται ἡ ἔννοια τοῦ ἀπείρου, εἶναι ταὐτόσημον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων τῆς φθινούσης γεωμετρικῆς προόδου

$$S=A+\frac{A}{n}+\frac{A}{n^2}+\cdots+\frac{A}{n^{\nu-1}}, \quad \text{ὅταν} \quad \nu\to\infty.$$

2. Ὅπως εἶναι γνωστόν, οἱ ἀρχαῖοι Ἕλληνες μαθηματικοὶ ἀπέφευγον νὰ χρησιμοποιῶσι τὴν ἔννοιαν τοῦ ἀπείρου κατὰ τὴν ἐκτέλεσιν συγκεκριμένων μαθηματικῶν πράξεων. Δὲν εἶναι ὅμως γνωστὸν πότε οἱ Ἕλληνες ἐχρησιμοποίησαν διὰ πρώτην φορὰν τὴν ἔννοιαν τοῦ ἀπείρου εἰς τὰ μαθηματικά. Ἀνώνυμος σχολιαστὴς πληροφορεῖ ἡμᾶς ὅτι οἱ Πυθαγόρειοι ἐχρησιμοποίησαν τὴν ἔννοιαν τοῦ ἀπείρου, διὰ νὰ ἀποδείξωσιν ὅτι πᾶν μέγεθος δύναται νὰ τέμνηται ἐπ' ἄπειρον. (Euclidis Opera omnia V, 416—17, I. L. Heiberg). Ἐξ ἄλλου ἐκ τοῦ Παρμενίδου τοῦ Πλάτωνος (127 a) καὶ τοῦ Διογένους τοῦ Λαερτίου ὑπολογίζεται ὅτι ὁ Ζήνων ὁ Ἐλεάτης ἀνέγνωσεν ἐν Ἀθήναις τὰ περίφημα αὐτοῦ γράμματα, ὅπου γίνεται μνεία τῆς ἐννοίας τοῦ ἀπείρου, περὶ τὸ ἔτος 435 π. Χ. Τέλος ὁ Ἱπποκράτης ὁ Χῖος (περὶ τὸ 430 π. Χ.), διὰ νὰ ἀποδείξῃ τὸν τετραγωνισμὸν τῶν μηνίσκων, χρησιμοποιεῖ τὸ εἰς τὰ Στοιχεῖα τοῦ Εὐκλείδου (XII, 2) περιλαμβανόμενον θεώρημα, ὅτι οἱ κύκλοι εἶναι ὡς τὰ τετράγωνα τῶν διαμέτρων. Εἰς τὸ θεώρημα δὲ τοῦτο γίνεται χρῆσις τῆς ἐννοίας τοῦ ἀπείρου.

Ἐκ τῶν προηγουμένως ἐκτεθέντων συνάγεται τὸ συμπέρασμα ὅτι τὸ εὐκλείδειον θεώρημα XII, 2 δὲν εἶναι ἐπινόησις τοῦ Εὐδόξου (408—355 π. Χ.). Εἰς τὸν Εὔδοξον ὅμως ὀφείλεται κατὰ πληροφορίαν τοῦ Ἀρχιμήδους (Opera omnia I, σελ. 2, 1910, I. L. Heiberg) ἡ ἀπόδειξις ὅτι ὁ κῶνος εἶναι τὸ $\frac{1}{3}$ τοῦ κυλίνδρου τοῦ ἔχοντος τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος πρὸς τὸν κῶνον. Εἰς τὴν ἀπόδειξιν δὲ αὐτὴν χρησιμοποιεῖται ἡ ἔννοια τοῦ ἀπείρου.

Εἰς τὰ Στοιχεῖα τοῦ Εὐκλείδου (IX, 35) ἀποδεικνύεται ὁ τύπος ὁ παρέχων τὸ ἄθροισμα ν ὅρων γεωμετρικῆς προόδου, ὁ $\Sigma = \frac{\alpha\omega^{\nu} - \alpha}{\omega - 1}$, (1), ὅπου α ὁ πρῶτος ὅρος, $0 < \omega \lessgtr 1$ ὁ λόγος τῆς προόδου καὶ ν=2, 3, 4 . . . . τὸ πλῆθος τῶν ὅρων. Εἰς τὸν τύπον (1) δὲν περιλαμβάνεται ἡ ἀπόδειξις ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων τῆς φθινούσης γεωμετρικῆς προόδου εἶναι

$$\Sigma = \alpha + \alpha\omega + \alpha\omega^2 + \ldots + \alpha\omega^{\nu-1} = \frac{\alpha}{1-\omega}, \quad |\omega| < 1, \text{ διὰ } \nu \to \infty.$$

Ὁ Ἀριστοτέλης ὅμως πληροφορεῖ ἡμᾶς ὅτι οἱ ἀρχαῖοι Ἕλληνες ἐγνώριζον ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ν ὅρων τῆς γεωμετρικῆς προόδου

$$A\omega + A\omega^2 + \ldots + A\omega^{\nu} \text{ εἶναι } \leqq A, \text{ διὰ } \nu \to \infty, \ |\omega| < 1.$$

Τοῦτο συνάγεται ἐκ τῆς πραγματείας αὐτοῦ Φυσικῆς ἀκροάσεως (Γ 206 b 7—9), ὅπου κατὰ τὴν διαπραγμάτευσιν τῆς ἐννοίας τοῦ ἀπείρου γράφεται :

«Ἐν γὰρ τῷ πεπερασμένῳ μεγέθει ἂν λαβών τις ὡρισμένον προσλαμβάνῃ τῷ αὐτῷ λόγῳ μὴ τὸ αὐτό τι μέγεθος τῷ ὅλῳ περιλαμβάνων, οὐ διέξεισι τὸ πεπερασμένον»

Ἡ ἔννοια τοῦ χωρίου τούτου εἶναι ὅτι ἂν θεωρήσωμεν τὸ μέγεθος Α καὶ τὸ ἄθροισμα

$$\Sigma = \frac{A}{\mu} + \frac{A}{\mu^2} + \ldots + \frac{A}{\mu^{\nu}}, \quad \nu \to \infty, \ \mu = 2, 3, 4 \ldots, \text{ θὰ εἶναι } \Sigma \leqq A, \ (3).$$

Τὸ ἄπειρον, τὸ ὁποῖον χρησιμοποιεῖ ἐνταῦθα ὁ Ἀριστοτέλης, τὸ ὀνομάζει «δυνάμει τε καὶ ἐπὶ καθαιρέσει» γράφων :

«Ἄλλως μὲν οὖν οὐκ ἔστιν, οὕτως δ' ἔστι τὸ ἄπειρον, δυνάμει τε καὶ ἐπὶ καθαιρέσει». (Γ 206 b 13—14).

Δὲν ἔχει διασωθῆ ἡ ἀπόδειξις τῆς ἀνωτέρω σχέσεως (3). Ὁ Ἀρχιμήδης ὅμως προχωρεῖ ἓν βῆμα περισσότερον ἐκ τῆς σχέσεως αὐτῆς καὶ ὑπολογίζει τὸ ἄθροισμα

$$\Sigma = A + \frac{A}{4} + \frac{A}{4^2} + \ldots + \frac{A}{4^{\nu-1}}, \quad \nu \to \infty.$$

Διότι εἰς τοῦτο καταλήγει ἡ ἀπόδειξις τοῦ 23 θεωρήματος τῆς πραγματείας αὐτοῦ Τετραγωνισμὸς παραβολῆς.

Καθ' ὅσον εἶναι γνωστόν, ὁ 'Αρχιμήδης, ὅταν χρησιμοποιῇ εἰς τὰς ἀποδείξεις τῶν θεωρημάτων του προτάσεις, αἵτινες ἔχουν ἀποδειχθῆ ὑπὸ προγενεστέρων του μαθηματικῶν, δὲν ἀποδεικνύει αὐτάς. Οὕτω, ἐπὶ παραδείγματι, εἰς τὴν πραγματείαν του Κύκλου μέτρησις χρησιμοποιεῖ ἄνευ ἀποδείξεως τὴν σχέσιν $\frac{265}{153} < \sqrt{3} < \frac{1351}{780}$. Θεωρεῖται δὲ βέβαιον ὅτι ἡ ἀπόδειξις τῆς σχέσεως αὐτῆς, ἡ ὁποία δὲν σῴζεται, ἔχει γίνει πολὺ πρὸ τοῦ 'Αρχιμήδους. Κατὰ συνέπειαν τῶν ἀνωτέρω τὸ θεώρημα 23 τῆς πραγματείας του Τετραγωνισμὸς παραβολῆς ἀποδεικνύεται διὰ πρώτην φορὰν ὑπὸ τοῦ 'Αρχιμήδους.

3. 'Η γενίκευσις τοῦ ἀρχιμηδείου θεωρήματος.

Ἔστω ὁσαδήποτε μεγέθη τὰ Α, Β, Γ, Δ, Ε . . . . ἀποτελοῦντα ἐν συνεχείᾳ ὅρους φθινούσης γεωμετρικῆς προόδου ἐχούσης λόγον $\frac{1}{n}$ (n=2, 3, 4 . . . .), ὅπου Α ὁ μέγιστος ὅρος καὶ

$$Β = \frac{Α}{n},\ (1),\quad Γ = \frac{Β}{n}\ (2),\quad Δ = \frac{Γ}{n},\ (3)\ \text{καὶ}\ Ε = \frac{Δ}{n}\ \text{ὁ μικρότερος ὅρος}\ (4).$$

Ἔστω δὲ

$$Ζ = \frac{Β}{n-1},\ (5),\quad Η = \frac{Γ}{n-1}\ (6),\quad Θ = \frac{Δ}{n-1},\ (7),\quad Ι = \frac{Ε}{n-1},\ (8).$$

'Εκ τῶν (1 καὶ 5) λαμβάνομεν $Β+Ζ = \frac{Α}{n-1}$, (9)

'Εκ τῶν (2 καὶ 6) » $Γ+Η = \frac{Β}{n-1}$, (10)

'Εκ τῶν (3 καὶ 7) » $Δ+Θ = \frac{Γ}{n-1}$, (11)

'Εκ τῶν (4 καὶ 8) » $Ε+Ι = \frac{Δ}{n-1}$, (12).

'Αλλὰ ἐκ τῶν (5, 6, 7) εἶναι $Ζ+Η+Θ = \frac{1}{n-1}(Β+Γ+Δ)$, (13).

Διὰ προσθέσεως κατὰ μέλη τῶν (9, 10, 11, 12) λαμβάνομεν

$$Β+Γ+Δ+Ε+Ζ+Η+Θ+Ι = \frac{1}{n-1}\ (Α+Β+Γ+Δ),\ (14).$$

Εἰς ταύτην δι' ἀπαλοιφῆς τῶν ἴσων ἐκ τῆς (13) εἶναι

$$Β+Γ+Δ+Ε+Ι = \frac{Α}{n-1},\ (15).$$

Καὶ διὰ προσθέσεως τοῦ Α εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς (15) λαμβάνομεν

$$Α+Β+Γ+Δ+Ε+Ι = \frac{nΑ}{n-1} = \frac{Α}{1-\frac{1}{n}} = \frac{Α}{1-ω},\ \text{ἐὰν τεθῇ}\ \frac{1}{n} = ω.$$

Εἶναι δὲ $Ι = \frac{Ε}{n-1}$, (ἐκ τῆς 8), ὅπου Ε εἶναι ὁ μικρότερος ὅρος τῆς φθινούσης προόδου. Κατὰ συνέπειαν διὰ τῆς ἀρχιμηδείου ἀποδείξεως εὑρίσκεται τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων τῆς φθινούσης γεωμετρικῆς προόδου

$$S = Α + \frac{Α}{n} + \frac{Α}{n^2} + \dots \frac{Α}{n^{ν-1}},$$

ὅταν $ν \to \infty$, χωρὶς ὅμως νὰ γίνεται κατ' αὐτὴν χρησιμοποίησις τῆς ἐννοίας τοῦ ἀπείρου.

Zusammenfassung

Der 23. Lehrsatz der Quadratur der Parabel von Archimedes lautet: In einer geometrischen Reihe mit dem Quotienten $\frac{1}{4}$ ist die um den dritten Teil des kleinstes Gliedes vermehrte Summe aller Glieder $\frac{4}{3}$ mal so gross wie das gröste. Es wird durch dasselbe archimedische Beweisverfahren bewiesen:

Liegt die abfallende geometrische Reihe $A+\frac{A}{n}+\frac{A}{n^2}$, vor, $(n=2, 3, 4 \ldots.)$,

$$\text{so ist } A+\frac{A}{n}+\frac{A}{n^2}+\frac{1}{n-1}\cdot\frac{A}{n^2}=\frac{nA}{n-1}.$$

Dies ist gleichbedeutend mit der Summe der unendlichen geometrischen Reihe

$$S=A+\frac{A}{n}+\frac{A}{n^2}+\cdots\frac{A}{n^{\nu-1}}=\frac{A}{1-\frac{1}{n}},\quad \nu\to\infty,\quad \left(\left|\frac{1}{n}\right|<1\right).$$

Es wird erwähnt, dass Aristoteles den folgenden Lehrsatz wusste:
Die Summe S der Glieder der abfallenden geometrischen Reihe

$$\frac{A}{\mu}+\frac{A}{\mu^2}+\frac{A}{\mu^3}\cdots+\frac{A}{\mu^\nu},\quad \nu\to\infty,\quad (\mu=2, 3, 4 \ldots.),\quad \leqq A \text{ ist},$$

(Phys. Γ 206 b 7—9).