ΕΥΑΓΓΕΛΟΥ Σ. ΣΤΑΜΑΤΗ

ΑΝΑΛΥΣΙΣ ΕΝΟΣ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΤΩΝ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΩΝ ΤΟΥ ΔΙΟΦΑΝΤΟΥ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Τὰ πρῶτα δέκα θεωρήματα τοῦ δευτέρου βιβλίου τῶν Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου περιέχουν τὴν λεγομένην γεωμετρικὴν ἄλγεβραν τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων, θεωροῦνται δὲ ὡς δημιουργία τῶν πρώτων Πυθαγορείων, οἱ ὁποῖοι τοποθετοῦνται χρονικῶς περὶ τὸ ἔτος 500 π. Χ. Τὸ περιεχόμενον τῶν δέκα αὐτῶν θεωρημάτων ἀναφέρεται εἰς τὰς θεμελιώδεις ταὐτότητας τῆς ἀλγέβρας. Ἡ ἀπόδειξις εἰς αὐτὰ γίνεται γεωμετρικῶς. Ὁ ὅρος «ἄλγεβρα» εἶναι ὡς γνωστὸν ἀραβικός. Εἰς πολλοὺς ἐπικρατεῖ ἡ ἀντίληψις ὅτι ὁ κλάδος τῆς μαθηματικῆς ἐπιστήμης ὁ ἐπικαλούμενος ἄλγεβρα εἶναι δημιούργημα τῶν Ἀράβων. Οὐδὲν τούτου ἀναληθέστερον. Πρόκειται περὶ μύθου, ὁ ὁποῖος μεταδιδόμενος ἀπὸ γενεᾶς εἰς γενεὰν κινδυνεύει νὰ μετατραπῇ εἰς ἱστορικὴν ἀλήθειαν. Τὸ ἀληθὲς ἐν προκειμένῳ εἶναι ὅτι οἱ Ἄραβες ἀπὸ τοῦ ὀγδόου περίπου αἰῶνος μ. Χ. ἤρχισαν νὰ μεταφράζουν τὰ μαθηματικὰ συγγράμματα τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων καὶ νὰ μελετοῦν αὐτὰ ἐπισταμένως. Ἐπινόησις ἢ ἀνακάλυψις ἔστω καὶ ἑνὸς μόνου μαθηματικοῦ θεωρήματος ὑπὸ τῶν Ἀράβων, εἰς ἡμᾶς τοὐλάχιστον δὲν εἶναι γνωστή, ὅπως δὲν εἶναι γνωστὴ καὶ ἐπινόησις ἢ ἀνακάλυψις θεωρήματός τινος ὑπὸ τῶν Ῥωμαίων. Ἀρκεταὶ μαθηματικαὶ προτάσεις τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων αἱ ὁποῖαι δὲν ἐσώθησαν εἰς τὴν ἑλληνικὴν γλῶσσαν διεσώθησαν εἰς τὴν ἀραβικήν. Οὕτω ἐκ τῶν 8 βιβλίων τῶν περιφήμων Κωνικῶν τοῦ μεγάλου γεωμέτρου τῆς ἀρχαιότητος Ἀπολλωνίου, τὰ τέσσαρα πρῶτα ἐσώθησαν εἰς τὴν ἑλληνικὴν καὶ τὰ τρία ἑπόμενα εἰς τὴν ἀραβικήν, ἐν ᾧ τὸ ὄγδοον ἀπωλέσθη.

Οἱ Πυθαγόρειοι δὲν εἶχον δημιουργήσει ἀλγεβρικὸν συμβολισμόν. Καθ' ὅσον εἶναι γνωστὸν μέχρι σήμερον ὁ ἀλγεβρικὸς συμβολισμὸς παρετηρήθη τὸ πρῶτον εἰς τὰ Ἀριθμητικὰ τοῦ Διοφάντου.

Ὁ Διόφαντος ἤκμασε, κατὰ πᾶσαν πιθανότητα, περὶ τὸ 250 μ. Χ. ἐν Ἀλεξανδρείᾳ ὅπου ἀπέθανε καὶ ἐτάφη. Ἐκ τῶν ἔργων του ἡ πραγματεία ὑπὸ τὸν τίτλον Ἀριθμητικὰ ἀπετελεῖτο ἐκ 13 βιβλίων. Ἐκ τούτων ἐσώθησαν μόνον τὰ πρῶτα ἕξ, ἐν ᾧ τὰ ἑπόμενα ἑπτὰ ἀπωλέσθησαν.

Τὸ περιεχόμενον τῶν Ἀριθμητικῶν ἀναφέρεται εἰς τὴν ἐπίλυσιν ἀλγεβρικῶν ἐξισώσεων καὶ συστημάτων καὶ μάλιστα συστημάτων, ὅπου οἱ ἄγνωστοι εἶναι περισσότεροι τῶν διδομένων ἐξισώσεων. Ἀλλὰ καὶ μεμονωμέναι ἐξισώσεις περιέχουσαι περισσοτέρους τοῦ ἑνὸς ἀγνώστους ὑπάρχουν εἰς τὰ Ἀριθμητικά. Ἐκεῖθεν δὲ καὶ ἡ ὀνομασία τῶν τοιούτων ἐξισώσεων ὡς διοφαντικῶν ἐξισώσεων. Ἐνταῦθα δέον νὰ προστεθῇ ὅτι αἱ διοφαντικαὶ ἐξισώσεις δὲν εἶναι ἐπινόησις τοῦ Διοφάντου. Ὁ Πυθαγόρας μνημονεύεται ὡς πρῶτος ἐπιλύσας τὴν ἐξίσωσιν $z^2=x^2+y^2$, ἥτις εἶναι διοφαντικὴ ἐξίσωσις δευτέρου βαθμοῦ, περιέχουσα τρεῖς ἀγνώστους εἰς τὴν δευτέραν δύναμιν. Κατὰ συνέπειαν ἡ ἔρευνα τῶν διοφαντικῶν ἐξισώσεων γίνεται τὸ πρῶτον περὶ τὸ 540 π. Χ., ὅτε τοποθετεῖται ἡ ἀκμὴ τοῦ Πυθαγόρου.

Εἰς τὴν Δυτικὴν Εὐρώπην αἱ ἀλγεβρικαὶ γνώσεις τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων ἐκ τῶν Ἀριθμητικῶν τοῦ Διοφάντου μετεφέρθησαν τὸ πρῶτον ὑπὸ τοῦ ἐμπόρου καὶ μαθηματικοῦ Λεονάρδου τῆς Πίζης (Fibonazzi) περὶ τὸ ἔτος 1200 μ. Χ. Φαίνεται ὅτι ὁ Fibonazzi μετεῖχε τῶν Σταυροφοριῶν εἴτε ὡς ὁπλίτης εἴτε ὡς ἔμπορος. Εἰς τὴν ἐν Ἰταλίᾳ ἐκδοθεῖσαν ἄλγεβραν τοῦ Fibonazzi ὑπάρχουν πολλὰ προβλήματα ἐκ τῶν Ἀριθμητικῶν τοῦ Διοφάντου, ὡς προβλήματα Fibonazzi. Κατὰ τὸ ἔτος 1572 ὁ καλός, Ἰταλὸς ἐπίσης, μαθηματικὸς Bombelli ἐδημοσίευσε τὴν περίφημον ἄλγεβράν του, ἡ ὁποία περιεῖχε 143 προβλήματα ἐκ τῶν 189 τῶν ἐξ σωθέντων βιβλίων τῶν Ἀριθμητικῶν τοῦ Διοφάντου, ὡς ἰδικά του. (P. ver Eecke, Diophante d' Alexandrie, σελ. LXII—LXVII).

Τὸ ἑλληνικὸν κείμενον τῶν Ἀριθμητικῶν τοῦ Διοφάντου, μετὰ τοῦ περισωθέντος μικροῦ μέρους (τεσσάρων θεωρημάτων) τῆς πραγματείας του περὶ Πολυγώνων ἀριθμῶν, ἐδημοσιεύθη διὰ τοῦ τύπου τὸ πρῶτον ἐν Παρισίοις τῷ 1621 ὑπὸ τοῦ Γάλλου μαθηματικοῦ Gaspar Bachet, Sieur de Méziriack ἐκ χειρογράφου εὑρισκομένου ἐν τῇ βιβλιοθήκῃ τῶν Παρισίων. Ἡ δευτέρα ἔκδοσις τούτου ἐγένετο πάλιν ἐν Γαλλίᾳ ὑπὸ τοῦ Σαμουὴλ Fermat, υἱοῦ τοῦ Πέτρου Fermat, σπουδαίου τούτου μελετητοῦ καὶ σχολιαστοῦ τοῦ Διοφάντου. Ἡ τρίτη ἔκδοσις τῶν Ἀριθμητικῶν ἐγένετο ἐν Λιψίᾳ ὑπὸ τοῦ Γάλλου μαθηματικοῦ Paul Tannery (B. G. Teubner) εἰς δύο τόμους. Εἰς τὸν πρῶτον τόμον (1893) περιέχονται τὰ Ἀριθμητικὰ καὶ τὸ Περὶ πολυγώνων ἀριθμῶν (ἀρχαῖον κείμενον καὶ μετάφρασις ἀντίστοιχος εἰς τὴν λατινικήν), ἐν ᾧ εἰς τὸν δεύτερον τόμον (1895) περιέχονται ἀριθμητικὰ ἐπιγράμματα ἐκ τῆς Παλατίνης Ἀνθολογίας καὶ σχόλια εἰς τὰ Ἀριθμητικὰ τοῦ Διοφάντου. Ἡ τετάρτη ἔκδοσις τοῦ κειμένου τῶν Ἀριθμητικῶν ἐν Εὐρώπῃ ἐγένετο ὑπ' ἐμοῦ περὶ τὸ τέλος τοῦ 1963 (Ἀθῆναι, Ὀργανισμὸς Ἐκδόσεως Διδακτικῶν Βιβλίων). Αὕτη περιέχει τὸ ἀρχαῖον κείμενον, ἀντίστοιχον μετάφρασιν εἰς τὴν νέαν Ἑλληνικὴν καὶ ἐπεξηγήσεις ἀναγκαίας πρὸς κατανόησιν τῶν προβλημάτων. Εἰς τὴν ἔκδοσιν ταύτην δὲν περιελήφθησαν τὰ παλαιὰ σχόλια.

Τὸ πρόβλημα, τὸ ὁποῖον ἀναλύεται κατωτέρω εἶναι τὸ 19ον τοῦ τρίτου βιβλίου τῶν Ἀριθμητικῶν. Ὁ ἀναγνώστης δὲν θὰ δυσκολευθῇ νὰ ἀντιληφθῇ καὶ νὰ ἐκτιμήσῃ τὸ μεγαλεῖον τοῦ Ἑλληνικοῦ πνεύματος καὶ εἰς τὸν ἀλγεβρικὸν λογισμόν. Ὁ χρησιμοποιούμενος κατὰ τὴν ἀνάλυσιν συμβολισμὸς εἶναι ὁ σύγχρονος ἀλγεβρικὸς συμβολισμός. Ὁ Διόφαντος ἀντὶ τοῦ συμβολισμοῦ τούτου χρησιμοποιεῖ φράσεις καὶ λέξεις δηλωτικὰς τῶν πράξεων. Καὶ τοῦτο ἐπιτείνει ἔτι περισσότερον τὸν θαυμασμόν μας διὰ τὴν ἀλγεβρικὴν δημιουργίαν τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων.

Τὸ πρὸς ἀνάλυσιν πρόβλημα:

Βιβλίον III, πρόβλημα 19ον.

Νὰ εὑρεθῶσι τέσσαρες ἀριθμοί, ὅπως τὸ τετράγωνον τοῦ ἀθροίσματος αὐτῶν ἢ σὺν ἕκαστον ἢ μεῖον ἕκαστον ἀριθμὸν σχηματίζῃ τετράγωνον.

Ἔστωσαν οἱ τέσσαρες ἄγνωστοι ἀριθμοὶ y, z, ω, φ.

Τὰ τέσσαρα ἐπιτάγματα τοῦ προβλήματος εἶναι:

$(y+z+\omega+\varphi)^2 \pm y =$ τετράγωνος, (1), $\quad (y+z+\omega+\varphi)^2 \pm z =$ τετράγωνος, (2),

$(y+z+\omega+\varphi)^2 \pm \omega =$ τετράγωνος, (3), $\quad (y+z+\omega+\varphi)^2 \pm \varphi =$ τετράγωνος, (4).

Θεωρεῖ τὴν ἐξίσωσιν $\alpha^2=\beta^2+\gamma^2$ τοῦ Πυθαγορείου θεωρήματος καὶ τὴν ἐκ ταύτης ταυτότητα

$$\alpha^2 \pm 2\beta\gamma = \beta^2+\gamma^2 \pm 2\beta\gamma = (\beta \pm \gamma)^2$$

καὶ λέγει ὅτι τὸ πρόβλημα εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ πρόβλημα, νὰ εὕρῃ τέσσαρα ὀρθογώνια τρίγωνα ἔχοντα τὴν αὐτὴν ὑποτείνουσαν καὶ διαφόρους καθέτους πλευράς. Τοῦτο, λέγει, εἶναι τὸ ἴδιον πρὸς τὸ πρόβλημα, δοθεὶς τετράγωνος νὰ ἀναλυθῇ εἰς ἄθροισμα δύο τετραγώνων κατὰ τέσσαρας διαφόρους τρόπους, «καὶ ἡμεῖς ἐμάθομεν νὰ ἀναλύωμεν τετράγωνον ἀριθμὸν εἰς δύο τετραγώνους κατ' ἀπείρους τρόπους».

[Ἡ ἀνάλυσις τετραγώνου ἀριθμοῦ εἰς ἄθροισμα δύο τετραγώνων ἀποτελεῖ ἀντικείμενον τοῦ 8ου προβλήματος τοῦ δευτέρου βιβλίου τῶν Ἀριθμητικῶν καὶ ἔχει ὡς ἑξῆς:

Ἔστω ὁ πρὸς ἀνάλυσιν τετράγωνος ὁ γ^2. Καλεῖ τὸν ἕνα τῶν ζητουμένων τετραγώνων x^2. Ὁ ἄλλος θὰ εἶναι τότε γ^2-x^2, (1). Λαμβάνει τυχὸν πολλαπλάσιον τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης τοῦ x^2, ἔστω τὸ μx, ἔνθα $\mu \neq 1$ καὶ σχηματίζει τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ ἄλλου τετραγώνου ἀριθμοῦ ἴσην πρὸς $\mu x-\gamma$. Τότε θὰ εἶναι $\gamma^2=x^2+(\mu x-\gamma)^2$.

Ἐκ ταύτης εἶναι $x=\dfrac{2\mu\gamma}{\mu^2+1}$.

Δι' ἀντικαταστάσεως τῆς εὑρεθείσης τιμῆς τοῦ x εἰς τὴν (1) εὑρίσκεται ὁ δεύτερος ζητούμενος τετράγωνος ἀριθμὸς $=\left[\dfrac{\gamma(\mu^2-1)}{\mu^2+1}\right]^2$. Ἑπομένως ὁ δοθεὶς τετράγωνος ἀριθμὸς ἀνελύθη εἰς ἄθροισμα δύο τετραγώνων ἀριθμῶν, ἤτοι εἶναι

$$\gamma^2=\left[\frac{2\mu\gamma}{\mu^2+1}\right]^2+\left[\frac{\gamma(\mu^2-1)}{\mu^2+1}\right]^2 \quad (2).$$

Δίδοντες εἰς τὸν μ τὰς τιμὰς 2, 3, 4.... ἀναλύομεν τὸν γ^2 εἰς ἄθροισμα δύο τετραγώνων κατ' ἀπείρους τρόπους.

(Σημείωσις. Ἐὰν εἰς τὴν σχέσιν (2) ἀπαλείψωμεν τοὺς παρονομαστὰς εὑρίσκομεν

$$(\mu^2+1)^2=(2\mu)^2+(\mu^2-1)^2, \quad (3).$$

Ἐὰν $\mu=\dfrac{m}{n}$, ἡ σχέσις (3) γίνεται

$$(m^2+n^2)^2=(2mn)^2+(m^2-n^2)^2, \quad (4).$$

Ὁ τύπος (4) παρέχει ὅλας τὰς ἀκεραίας λύσεις τῆς ἐξισώσεως $z^2=x^2+y^2$, ἤτοι ἁπάσας τὰς τριάδας ἀκεραίων ἀριθμῶν, οἵτινες ἐπαληθεύουσι τὸ Πυθαγόρειον θεώρημα καὶ εἶναι ταὐτόσημος πρὸς τὸν Εὐκλείδειον τύπον Χ, 28, Λῆμμα 1. Τὴν σχέσιν (4) χρησιμοποιεῖ ὁ Διόφαντος εἰς τὸ προκείμενον 19ον πρόβλημα τοῦ 3ου βιβλίου)].

Ἀφοῦ λοιπὸν ὑπενθυμίζει ὅτι ἐμάθομεν πῶς δοθεὶς τετράγωνος ἀναλύεται εἰς ἄθροισμα δύο τετραγώνων κατὰ πολλοὺς τρόπους, λαμβάνει δύο ὀρθογώνια τρίγωνα τῶν ὁποίων αἱ πλευραὶ νὰ ἐκφράζωνται ὑπὸ ἐλαχίστων ἀριθμῶν, οἷον τῶν 3, 4, 5 καὶ 5, 12, 13. Οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι λαμβάνονται ἐκ τοῦ τύπου τοῦ ἀποδιδομένου εἰς τὸν Πυθαγόραν

$$\mu^2+\left(\frac{\mu^2-1}{2}\right)^2=\left(\frac{\mu^2+1}{2}\right)^2, \text{ ὅπου } \mu \text{ περιττός},$$

(ἐνταῦθα πρῶτον 3 καὶ κατόπιν 5).

Πολλαπλασιάζει ἕκαστον τῶν ληφθέντων ἀριθμῶν ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν τοῦ ἄλλου τριγώνου, ὁπότε ἔχει 39, 52, 65 καὶ 25, 60, 65 ἤτοι ἔχει δύο ὀρθογώνια τρίγωνα ἔχοντα τὰς ὑποτεινούσας ἴσας. Μένει νὰ εὕρῃ ἄλλα δύο ὀρθογώνια τρίγωνα ἔχοντα τὸν 65 ὡς ὑποτείνουσαν. Ὁ 65, λέγει, ἀναλύεται εἰς ἄθροισμα δύο τετραγώνων κατὰ δύο τρόπους, ἤτοι εἶναι $65=4^2+7^2$ καὶ $65=8^2+1^2$. Τοῦτο δὲ συμβαίνει ἐπειδὴ $65=5.13$ καὶ εἶναι $5=1^2+2^2$ καὶ $13=2^2+3^2$. —

Σχηματίζει τώρα δύο ὀρθογώνια τρίγωνα, τὸ μὲν ἐκ τῶν ἀριθμῶν (7, 4), τὸ δὲ ἐκ τῶν ἀριθμῶν (8, 1) χρησιμοποιῶν τὴν ταὐτότητα, τὴν ὁποίαν ἐμνημονεύσαμεν ἀνωτέρω, τὴν

$$(2mn)^2+(m^2-n^2)^2=(m^2+n^2)^2.$$

Τὸ ἐκ τῶν δύο ἀριθμῶν 7 καὶ 4 λαμβανόμενον κατὰ τὴν ἀνωτέρω ταὐτότητα τρίτον ὀρθογώνιον τρίγωνον ($m=7$, $n=4$), ἔχει πλευρὰς (33, 56, 65), ἐν ᾧ τὸ ἐκ τῶν δύο ἀριθμῶν 8 καὶ 1 λαμβανόμενον ὁμοίως τέταρτον ὀρθογώνιον τρίγωνον ἔχει πλευρὰς (16, 63, 65).

Κατὰ συνέπειαν τὰ τέσσαρα ὀρθογώνια τρίγωνα τὰ ἔχοντα τὴν αὐτὴν ὑποτείνουσαν 65 εἶναι (39, 52, 65), (25, 60, 65), (33, 56, 65), (16, 63, 65).

Ἐπανέρχεται τώρα εἰς τὸ ἀρχικὸν πρόβλημα καὶ θέτει τὸ ἄθροισμα τῶν ζητουμένων ἀγνώστων $(y+z+\omega+\varphi)=65x$, (5), καὶ ἕκαστον τῶν ζητουμένων ἀγνώστων ἴσον πρὸς τὸ τετραπλάσιον τοῦ ἐμβαδοῦ ἑκάστου ὀρθογωνίου τριγώνου, συναρτήσει τοῦ x^2, ἤτοι

$$y=\frac{4\,.\,39\,.\,52}{2}x^2=4056x^2,\qquad z=\frac{4\,.\,25\,.\,60}{2}x^2=3000x^2,$$

$$\omega=\frac{4\,.\,33\,.\,56}{2}x^2=3696x^2,\qquad \varphi=\frac{4\,.\,16\,.\,63}{2}x^2=2016x^2.$$

Δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν (5) λαμβάνει $12768x^2=65x$, ἐξ ἧς $x=\frac{65}{12768}$.

Καὶ δι' ἀντικαταστάσεως τέλος τῆς τιμῆς τοῦ x εἰς τὰς προηγουμένας τιμὰς τῶν ἀγνώστων εἶναι

$$y=17136600:\xi^2,\qquad z=12675000:\xi^2$$

$$\omega=15615600:\xi^2,\qquad \varphi=8517600:\xi^2$$

ὅπου $\xi^2=(12768)^2=163\,021\,824.$

Ἐπαλήθευσις

Καλοῦμεν α,β,γ,δ τὰς τιμὰς τῶν ἀριθμητῶν τῶν ἀγνώστων καὶ ἀναλύομεν αὐτάς, τὸ ἄθροισμά των, ὡς καὶ τὸν παρονομαστὴν (τὸ ξ^2) εἰς γινόμενα παραγόντων, ὁπότε ἔχομεν

$$\alpha=17\,136\,600=2^3.3.5^2.13^4,\qquad \beta=12\,675\,000=2^3\ 3.5^5.13^2,$$

$$\gamma=15\,615\,600=2^4.3.5^2.11.13^2,\qquad \delta=8\,517\,600=2^5.3^2.5^2.7.13^2,$$

$$(\alpha+\beta+\gamma+\delta)=53\,944\,800=2^5.3.5^2.7.13^2.19,\qquad \xi^2=163\,021\,824=2^{10}.3^2.7^2.19^2.$$

Ἐκ τῶν σχέσεων (1, 2, 3, 4) λαμβάνομεν ἀντιστοίχως

1) $$\left(\frac{53\,944\,800}{163\,021\,824}\right)^2\pm\frac{17\,136\,600}{163\,021\,824}$$

$$\frac{(2^5.3.5^2.7.13^2.19)^2\pm2^3.3.5^2.13^4.2^{10}.3^2.7^2.19^2}{(163\,021\,824)^2}$$

$$\frac{2^{10}.3^2.5^2.7^2.13^4.19^2(5^2\pm2^3.3)}{(163\,021\,824)^2}=\left[\begin{array}{l}\rightarrow\\ \rightarrow\end{array}\right.$$

Ὁ ἀριθμητὴς γίνεται

$$2^{10}.3^2.5^2.7^2.13^4.19^2.7^2=(32.3.5.49.169.19)^2=(75\,522\,720)^2$$

καὶ $$2^{10}.3^2.5^2.7^2.13^4.19^2=(32.3.5.7.169.19)^2=(10\,788\,960)^2.$$

Ἑπομένως εἶναι

$$=\left[\begin{array}{l}\rightarrow\left(\dfrac{75\,522\,720}{163\,021\,824}\right)^2\\ \rightarrow\left(\dfrac{10\,788\,960}{163\,021\,824}\right)^2.\end{array}\right.$$

2)
$$\left(\frac{53\,944\,800}{163\,021\,824}\right)^2 \pm \frac{12\,675\,000}{163\,021\,824}$$

$$\frac{(2^5 . 3 . 5^2 . 7 . 13^2 . 19)^2 \pm 2^3 . 3 . 5^5 . 13^2 . 2^{10} . 3^2 . 7^2 . 19^2}{(163\,021\,824)^2}$$

$$\frac{2^{10} . 3^2 . 5^4 . 7^2 . 13^2 . 19^2 (13^2 \pm 2^3 . 3 . 5)}{(163\,021\,824)^2} = \begin{cases} \rightarrow \left(\dfrac{70\,543\,200}{163\,021\,824}\right)^2 \\ \rightarrow \left(\dfrac{29\,047\,200}{163\,021\,824}\right)^2 \end{cases}$$

3)
$$\left(\frac{53\,944\,800}{163\,021\,824}\right)^2 \pm \frac{15\,615\,600}{163\,021\,824}$$

$$\frac{(2^5 . 3 . 5^2 . 7 . 13^2 . 19)^2 \pm 2^4 . 3 . 5^2 . 7 . 11 . 13^2 . 2^{10} . 3^2 . 7^2 . 19^2}{(163\,021\,824)^2}$$

$$\frac{2^{10} . 3^2 . 5^2 . 7^2 . 13^2 . 19^2 (5^2 . 13^2 \pm 2^4 . 3 . 7 . 11)}{(163\,021\,824)^2} = \begin{cases} \rightarrow \left(\dfrac{73\,862\,880}{163\,021\,824}\right)^2 \\ \rightarrow \left(\dfrac{19\,088\,160}{163\,021\,824}\right)^2 \end{cases}$$

4)
$$\left(\frac{53\,944\,800}{163\,021\,824}\right)^2 \pm \frac{8\,517\,600}{163\,021\,824}$$

$$\frac{(2^5 . 3 . 5^2 . 7 . 13^2 . 19)^2 \pm 2^5 . 3^2 . 5^2 . 7 . 13^2 . 2^{10} . 3^2 . 7^2 . 19^2}{(163\,021\,824)^2}$$

$$2^{10} . 3^2 . 5^2 . 7^2 . 13^2 . 19^2 (5^2 . 13^2 \pm 2^5 . 3^2 . 7) = \begin{cases} \rightarrow \left(\dfrac{65\,563\,680}{163\,021\,824}\right)^2 \\ \rightarrow \left(\dfrac{39\,006\,240}{163\,021\,824}\right)^2 \end{cases}$$

ΕΥΑΓΓΕΛΟΥ Σ. ΣΤΑΜΑΤΗ

ΑΙ ΑΝΑΛΟΓΙΑΙ ΤΩΝ ΑΡΧΑΙΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΚΑΙ Η ΣΧΕΣΙΣ ΤΗΣ ΑΡΜΟΝΙΚΗΣ ΑΝΑΛΟΓΙΑΣ ΠΡΟΣ ΤΟΝ ΤΥΠΟΝ ΤΩΝ ΚΟΙΛΩΝ ΣΦΑΙΡΙΚΩΝ ΚΑΤΟΠΤΡΩΝ

Ὁ Ἰάμβλιχος, νεοπλατωνικὸς φιλόσοφος τῶν ἀρχῶν τοῦ 4ου αἰῶνος μ.Χ., (ἐκ Χαλκίδος τῆς Συρίας καταγόμενος), εἰς τὴν πραγματείαν αὐτοῦ «Περὶ τῆς Νικομάχου Ἀριθμητικῆς Εἰσαγωγῆς» (H. Pistelli, σελ. 100) λέγει ὅτι ἐπὶ τῆς παλαιᾶς ἐποχῆς τοῦ Πυθαγόρου διέκρινον εἰς τὰ μαθηματικὰ τρεῖς μεσότητας (δηλ. ἀναλογίας), τὴν ἀριθμητικήν, τὴν γεωμετρικὴν καὶ τὴν ὑπεναντίαν, ἡ ὁποία μετωνομάσθη ὑπὸ τῶν περὶ τὸν Ἀρχύταν καὶ τὸν Ἵππασον ἁρμονική. Ἀφοῦ δὲ μετεβλήθη τὸ ὄνομα τῆς ὑπεναντίας εἰς ἁρμονικήν, οἱ περὶ τὸν Εὔδοξον μαθηματικοὶ προσανευρόντες ἄλλας τρεῖς ἀναλογίας ἀκόμη ὠνόμασαν ὑπεναντίαν τὴν τετάρτην. Οἱ νεώτεροι δὲ εὗρον ἀκόμη ἄλλας τέσσαρας ἀναλογίας. [Μόναι δὲ τὸ παλαιὸν τρεῖς ἦσαν μεσότητες ἐπὶ Πυθαγόρου καὶ τῶν κατ' αὐτὸν μαθηματικῶν, ἀριθμητική τε καὶ ἡ γεωμετρικὴ καὶ ἡ ποτὲ μὲν ὑπεναντία λεγομένη τῇ τάξει τρίτη, ὑπὸ δὲ τῶν περὶ Ἀρχύταν αὖθις καὶ Ἵππασον ἁρμονικὴ μετακληθεῖσα, ὅτι τοὺς κατὰ τὸ ἡρμοσμένον καὶ ἐμμελὲς ἐφαίνετο λόγους περιέχουσα .... Ἀλλαγέντος δὲ τοῦ ὀνόματος οἱ μετὰ ταῦτα περὶ Εὔδοξον μαθηματικοὶ ἄλλας τρεῖς προσανευρόντες μεσότητας τὴν τετάρτην ἰδίως ὑπεναντίαν ἐκάλεσαν .... οἱ δὲ νεώτεροι τέσσαρας ἄλλας τινὰς προσανεῦρον, ἐκ τῶν ὅρων καὶ τῶν διαστημάτων προστεχνησάμενοι τὴν εὕρεσιν αὐτῶν].

Τὰς δέκα ὡς ἄνω ἀναλογίας ἐκθέτει ὡς ἑξῆς ὁ Νικόμαχος ὁ Γερασηνὸς εἰς τὴν πραγματείαν αὐτοῦ Ἀριθμητικὴ Εἰσαγωγὴ (R. Hoche, σελ. 144) :

«Ἐπὶ κεφαλαίου τοίνυν οἱ τῶν δέκα ἀναλογιῶν ὅροι ἐκκείσθωσαν ὑφ' ἓν παράδειγμα πρὸς τὸ εὐσύνοπτον».

πρώτης	α,	β,	γ
δευτέρας	α,	β,	δ
τρίτης	γ,	δ,	ς
τετάρτης	γ,	ε,	ς
πέμπτης	β,	δ,	ε
ἕκτης	α,	δ,	ς
ἑβδόμης	ς,	η,	ϑ
ὀγδόης	ς,	ζ,	ϑ
ἐνάτης	δ,	ς,	ζ
δεκάτης	γ,	ε,	η.

Ἑρμηνεύει δὲ καταλλήλως ὁ Νικόμαχος τὸν σχηματισμὸν ἑκάστης ἀναλογίας χρησιμοποιῶν ὡς παραδείγματα ἐφαρμογῆς τοὺς ἀνωτέρω ἀριθμούς.

Κατὰ σημερινὴν διατύπωσιν, ἂν θεωρήσωμεν τοὺς ἀριθμοὺς a, b, c, ὅπου $a>b>c$, αἱ δέκα ἀναλογίαι εἶναι αἱ κάτωθι :

1. $\frac{a-b}{b-c}=\frac{a}{a}=\frac{b}{b}=\frac{c}{c}$, ἢ $a-b=b-c$, $a+c=2b$, ἀριθμητική

2. $\frac{a-b}{b-c}=\frac{a}{b}$ ἢ $=\frac{b}{c}$, $ac=b^2$, γεωμετρική

3. $\frac{a-b}{b-c}=\frac{a}{c}$, $b=\frac{2ac}{a+c}$, $\frac{1}{a}+\frac{1}{c}=\frac{2}{b}$, ἁρμονική

4. $\frac{a-b}{b-c}=\frac{c}{a}$, $\frac{a^2+c^2}{a+c}=b$

5. $\frac{a-b}{b-c}=\frac{c}{b}$, $a=b+c-\frac{c^2}{b}$

6. $\frac{a-b}{b-c}=\frac{b}{a}$, $c=a+b-\frac{a^2}{b}$

7. $\frac{a-c}{b-c}=\frac{a}{c}$, $c^2=2ac-ab$

8. $\frac{a-c}{a-b}=\frac{a}{c}$, $a^2+c^2=a(b+c)$

9. $\frac{a-c}{b-c}=\frac{b}{c}$, $b^2+c^2=c(a+b)$

10. $\frac{a-c}{a-b}=\frac{b}{c}$, $a=b+c$.

[Σημείωσις: Οἱ ἀριθμοὶ τῆς (ἐξ ἀριστερῶν) τρίτης στήλης τῶν ἀριθμητικῶν παραδειγμάτων τοῦ Νικομάχου ἀντιστοιχοῦν εἰς τὸ a τῆς ἀνωτέρω συγχρόνου διατυπώσεως, οἱ τῆς δευτέρας στήλης εἰς τὸ b καὶ οἱ τῆς πρώτης εἰς τὸ c].

Ὁ Νικόμαχος γράφει, ὅτι τὴν ὀνομασίαν τῆς τρίτης ἀναλογίας, (τὴν ἁρμονικήν), τινὲς τὴν ἀποδίδουν εἰς τὸν Φιλόλαον (Τινὲς δὲ αὐτὴν ἁρμονικὴν καλεῖσθαι νομίζουσιν ἀκολούθως Φιλολάῳ ἀπὸ τοῦ παρέπεσθαι πάσῃ γεωμετρικῇ ἁρμονίᾳ . . .), (R. HOCHE, σελ. 135, 10), ἐν ᾧ ὁ Ἰάμβλιχος, ἀναφέρει, ὅτι ἡ ὀνομασία τῆς τρίτης ἀναλογίας εἰς ἁρμονικὴν ἀναφέρεται ὑπὸ τοῦ Ἀρχύτου καὶ τοῦ Ἱππάσου. Καὶ διὰ μὲν τὸν Ἵππασον δὲν ὑπάρχει ἄλλη συναφὴς ἐπιβεβαιωτικὴ πληροφορία, ἐν ᾧ διὰ τὸν Ἀρχύταν ὑπάρχει ἡ μαρτυρία τοῦ Πορφυρίου (Εἰς Πτολεμαίου Ἁρμονικὰ σ. 82, H. Diels, Fragmente d. Vor. I σελ. 435, 1951) ἔχουσα ὡς ἑξῆς :

«*μέσαι δὲ ἐντι τρῖς τᾷ μουσικᾷ, μία μὲν ἀριθμητικά, δευτέρα δὲ ἁ γεωμετρικά, τρίτα δ' ὑπεναντία, ἃν καλέοντι ἁρμονικάν. ἀριθμητικὰ μέν, ὅκκα ἔωντι* *τρεῖς ὅροι κατὰ τὰν τοίαν ὑπεροχὰν ἀνὰ λόγον· ᾧ πρᾶτος δευτέρου ὑπερέχει, τούτῳ δεύτερος τρίτου ὑπερέχει. καὶ ἐν ταύτᾳ <τᾷ> ἀναλογίᾳ συμπίπτει ἦμεν τὸ τῶν μειζόνων ὅρων διάστημα μεῖον, τὸ δὲ τῶν μειόνων μεῖζον. ἁ γεωμετρικὰ δέ, ὅκκα ἔωντι οἷος ὁ πρᾶτος ποτὶ τὸν δεύτερον, καὶ ὁ δεύτερος ποτὶ τὸν τρίτον. τούτων δ' οἱ μείζονες ἴσον ποιοῦνται τὸ διάστημα καὶ οἱ μείους. ἁ δ' ὑπεναντία, ἂν καλοῦμεν ἁρμονικάν, ὅκκα ἔωντι <τοῖοι· ᾧ> ὁ πρᾶτος ὅρος ὑπερέχει τοῦ δευτέρου αὐταύτου μέρει, τούτῳ ὁ μέσος τοῦ τρίτου ὑπερέχει τοῦ τρίτου μέρει. γίνεται δ' ἐν ταύτᾳ τᾷ ἀναλογίᾳ τὸ τῶν μειζόνων ὅρων διάστημα μεῖζον, τὸ δὲ τῶν μειόνων μεῖον»*.

Ἑ ρ μ η ν ε ί α : Εἰς δὲ τὴν μουσικὴν ὑπάρχουν τρεῖς ἀναλογίαι, μία μὲν ἀριθμητική, δευτέρα δὲ ἡ γεωμετρική, τρίτη δὲ ἡ ὑπεναντία, τὴν ὁποίαν καλοῦσιν ἁρμονικήν. Ἡ ἀριθμητικὴ μὲν ὅταν ὑπάρχουν τρεῖς ἐν συνεχείᾳ ἀριθμοί, τῶν ὁποίων ἡ διαφορὰ (ἀνὰ δύο, ἐν συνεχείᾳ) ἔχει τὸν αὐτὸν λόγον· ὅ,τι δηλ. ὑπερέχει ὁ πρῶτος τοῦ δευτέρου, τόσον ὑπερέχει ὁ δεύτερος τοῦ τρίτου. Καὶ εἰς τὴν ἀναλογίαν αὐτὴν συμβαίνει, ὥστε τὸ (μουσικὸν) διάστημα τῶν μεγαλυτέρων ὅρων (ἀριθμῶν) νὰ εἶναι μικρότερον, τὸ δὲ τῶν μικροτέρων ὅρων νὰ εἶναι μεγαλύτερον. Ἡ γεωμετρικὴ δὲ ὅταν εἶναι ὡς ὁ πρῶτος πρὸς τὸν δεύτερον, οὕτως ὁ δεύτερος πρὸς τὸν τρίτον. Οἱ μεγαλύτεροι δὲ ἐκ τούτων ἔχουν τὸ αὐτὸ διάστημα, ὅπως καὶ οἱ μικρότεροι Ἡ δὲ ὑπεναντία, τὴν ὁποῖαν καλοῦμεν ἁρμονικήν, ὅταν ὁ πρῶτος ὅρος ὑπερέχῃ τοῦ δευτέρου κατὰ τόσον ἰδικόν του (τοῦ πρώτου) μέρος, τόσον ἰδικόν του μέρος ὁ μέσος ὑπερέχει τοῦ τρίτου. Γίνεται δὲ εἰς τὴν ἀναλογίαν αὐτὴν τὸ διάστημα τῶν μεγαλυτέρων μεγαλύτερον, τὸ δὲ τῶν μικροτέρων μικρότερον.

Ἂν δηλ. ὑπάρχουν τρεῖς ἀριθμοὶ $a>b>c$ ὑπάρχει κατὰ τὸν Ἀρχύταν ἁρμονικὴ ἀναλογία ὅταν $a=b+\frac{a}{n}$ (ὁ a ὑπερέχει τοῦ b κατὰ μέρος αὐταύτου, κατὰ κλάσμα τοῦ ἑαυτοῦ του, δηλ. τοῦ a ($n=2, 3, 4, \ldots$) καὶ $b=c+\frac{c}{n}$. Ἐκ τῶν σχέσεων τούτων λαμβάνομεν $a-b=\frac{a}{n}$ καὶ $b-c=\frac{c}{n}$. Καὶ διὰ διαιρέσεως τούτων κατὰ μέλη εἶναι $\frac{a-b}{b-c}=\frac{a}{c}$, ἐκ ταύτης δὲ εἶναι

$$\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{1}{b}-\frac{1}{c}, \text{ ἢ } \frac{1}{a}+\frac{1}{c}=\frac{2}{b}, \ (1), \text{ ἐξ ἧς } b=\frac{2ac}{a+c}$$ εἶναι

τὸ ἁρμονικὸν μέσον τῶν ἀριθμῶν a, c. Ἐὰν εἰς τὴν ἀνωτέρω ἁρμονικὴν ἀναλογίαν θέσωμεν $a=12$, $c=6$ θὰ ἔχωμεν $b=8$ ὡς ἁρμονικὸν μέσον τῶν ἀριθμῶν 6 καὶ 12. Τὸ ἀριθμητικὸν μέσον τῶν δύο τούτων ἀριθμῶν εἶναι 9. Ἐκ τῶν τεσσάρων ὅμως τούτων ἀριθμῶν 6, 8, 9, 12 σχηματίζεται ἡ μουσικὴ ἀναλογία $6:8=9:12$ ἐκ τῆς ὁποίας ὁ Πυθαγόρας κατεσκεύασε τὴν μουσικὴν Πυθαγόρειον κλίμακα.

Ἐνταῦθα παρατηροῦμεν, ὅτι ἐὰν θεωρήσωμεν κοῖλον σφαιρικὸν κάτοπτρον ἀκτῖνος καμπυλότητος b καὶ φωτεινὸν ἀντικείμενον κείμενον ἐπὶ τοῦ κυρίου ἄξονος τοῦ κατόπτρου (ἔστω πέρα τοῦ κέντρου καμπυλότητος) εἰς ἀπόστασιν a ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ κατόπτρου, ἐν ᾧ τὸ εἴδωλον τοῦ ἀντικειμένου σχηματίζεται εἰς ἀπόστασιν c ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ κατόπτρου, ἡ σχέσις ἡ συνδέουσα τὰ τρία ταῦτα μεγέθη ἐκφράζεται διὰ τῆς ἁρμονικῆς ἀναλογίας $\frac{1}{a}+\frac{1}{c}=\frac{2}{b}$, ἤτοι ἡ ἀκτὶς καμπυλότητος τοῦ κοίλου σφαιρικοῦ κατόπτρου εἶναι τὸ ἁρμονικὸν μέσον τῶν ἀποστάσεων τοῦ ἀντικειμένου καὶ τοῦ εἰδώλου αὐτοῦ ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ κατόπτρου. Δυνάμεθα δηλονότι νὰ εἴπωμεν ὅτι ὁ μαθηματικὸς νόμος καθ' ὃν σχηματίζονται τὰ εἴδωλα τῶν φωτεινῶν ἀντικειμένων εἰς τὸν ὀφθαλμὸν εἶναι ὁ αὐτὸς πρὸς τὸν νόμον καθ' ὃν σχηματίζονται οἱ φθόγγοι τῆς μουσικῆς, ἐφ' ὅσον τὸ ἁρμονικὸν μέσον εἶναι εἷς ὅρος τῆς μουσικῆς ἀναλογίας ἐκ τῆς ὁποίας κατασκευάζεται ἡ μουσικὴ κλῖμαξ.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

M. Cantor, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik.

T. Heath, A history of Greek Mathematics.

O. Becker—J. E. Hofmann, Geschichte der Mathematik.

J. E. Hofmann, Geschichte der Mathematik, Sammlung Göschen, 1. Teil, 2. Auflage, 1963.

W. L. van der Waerden, Erwachende Wissenschaft, 1956, Basel—Stuttgart.

Paul—Henri Michel, De Pythagore a Euclide, Paris, 1950.

Πάππου, Συναγωγὴ III σ. 102, Hultsch.