

ΤΟ ΑΘΡΟΙΣΜΑ ΤΩΝ ΚΥΒΩΝ ΤΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Ὁ Νικόμαχος εἰς τὴν Ἀριθμητικὴν Εἰσαγωγὴν του (κεφ. 20, σελ. 118, 24-119, 18, R. Hoche) ἐξαιρεῖ τὰς ιδιότητες τῶν περιττῶν ἀριθμῶν, λέγων, ὅτι ἂν καταγράψωμεν τοὺς φυσικοὺς ἀριθμοὺς

1	2	3	4	5	6	7
1	2	4	8	16	32	64
1	3	9	27	81	243	729

οἱ τετράγωνοι ἀριθμοὶ τῶν ἀκολουθιῶν, κατὰ τὴν ἀρίθμησιν αὐτῶν ἀπὸ τῆς μονάδος, κατέχουν πάντοτε θέσιν περιττοῦ ἀριθμοῦ. Ἐὰν δὲ καταγράψωμεν, συνεχίζει ὁ Νικόμαχος, τὴν ἀπὸ μονάδος ἀκολουθίαν τῶν περιττῶν ἀριθμῶν

1 3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29.....

παρατηροῦμεν ὅτι :

Ἡ μονὰς ἐκφράζει τὸν κύβον αὐτῆς δυνάμει, ἦτοι $1 = 1^3$

Τὸ ἄθροισμα τῶν ἐν συνεχείᾳ δύο ὄρων εἶναι $3 + 5 = 2^3$

Τὸ ἄθροισμα τῶν ἐν συνεχείᾳ τριῶν ὄρων εἶναι $7 + 9 + 11 = 3^3$

Τὸ ἄθροισμα τῶν ἐν συνεχείᾳ τεσσάρων ὄρων εἶναι $13 + 15 + 17 + 19 = 4^3$

καὶ οὕτω καθ' ἐξῆς ἐπ' ἄπειρον

Ἄλλη πληροφορία σχετικὴ δὲν παρέχεται ὑπὸ τοῦ Νικομάχου. Ἐκ τινος ὄμως ἀραβικοῦ χειρογράφου, τοῦ Ἄραβος AL - KARKHI (10—11 αἰῶν) ¹, εἰς τὸ ὁποῖον ἀναφέρεται ὁ διὰ τῶν γνωμόνων τρόπος εὐρέσεως τοῦ ἄθροίσματος τῶν κύβων τῶν ἀριθμῶν $1^3 + 2^3 + 3^3 \dots$ χωρὶς νὰ ἀναφέρεται τὸ ὄνομα τοῦ Ἑλληνος συγγραφέως, εἶναι εὐκόλον νὰ συναγάγωμεν τὴν διὰ τῶν γνωμόνων, ὑπὸ τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων εὑρεσιν τοῦ ἄθροίσματος τῶν κύβων τῶν ἀριθμῶν $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3$, ὡς ἀκολουθῶς.

Ἐστω τὸ τετράγωνον A, πλευρᾶς 1. Περὶ αὐτὸ γράφομεν ἐν συνεχείᾳ γνῶμονας, τῶν ὁποίων ἕκαστος περιβάλλει τὸν προηγούμενόν του, τὸ πλάτος δὲ ἐκάστου γνώμονος εἶναι πάντοτε ἡ μονὰς. Εἰς τὸ σχῆμα ἔχομεν περιβάλλει τὸ τετράγωνον A διὰ 9 γνωμόνων, τῶν ὁποίων ἡ ἀρίθμησις γίνεται εἰς τὴν κορυφὴν ἐκάστου γνώμονος.

Τὸ τετράγωνον A ἐκφράζει τὸν κύβον τῆς μονάδος, 1^3 . Ὁ περὶ τὸ τετράγωνον πρῶτος γνῶμων ἔχει ἐμβαδὸν $2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 3$. Ὁ ἐπόμενος δεύτερος γνῶμων ἔχει ἐμβαδὸν $3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 5$. Τὸ ἄθροισμα τοῦ πρώτου καὶ τοῦ δευτέρου γνῶμονος εἶναι $3 + 5 = 8 = 2^3$.

Ἐὰν εἰς τὸ ἄθροισμα τοῦτο προσθέσωμεν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τετραγώνου A, τὸ ὁποῖον ἔχομεν παραστήσει διὰ 1^3 , θὰ ἔχομεν $1 + 3 + 5 = 1^3 + 2^3 = 3^2$.

Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τρίτου γνῶμονος εἶναι $4 \cdot 1 + 3 \cdot 1 = 7$.

Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τετάρτου γνῶμονος εἶναι $5 \cdot 1 + 4 \cdot 1 = 9$.

Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ πέμπτου γνῶμονος εἶναι $6 \cdot 1 + 5 \cdot 1 = 11$.

1) T. L. Heath, Greek Mathematics I p. 109, Oxford 1921.

Τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν τριῶν τούτων γνωμόνων (τρίτου, τετάρτου, πέμπτου) εἶναι $7+9+11=27=3^3$.

Ὁ κύβος τῆς μονάδος, ἐκφραζόμενος διὰ τοῦ τετραγώνου Α σὺν τὸ ἄθροισμα τῶν γνωμόνων πρώτου καὶ δευτέρου σὺν τὸ ἄθροισμα τῶν γνωμόνων τρίτου καὶ τετάρτου καὶ πέμπτου δίδει $1+(3+5)+(7+9+11)=1^3+2^3+3^3=6^2$.

Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ἕκτου γνόμονος εἶναι $7.1+6.1=13$

Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ἑβδόμου γνόμονος εἶναι $8.1+7.1=15$

Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὀγδόου γνόμονος εἶναι $9.1+8.1=17$

Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ἐνάτου γνόμονος εἶναι $10.1+9.1=19$

Τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν τεσσάρων γνωμόνων (ἕκτου, ἑβδόμου, ὀγδόου, ἐνάτου) εἶναι $13+15+17+19=64=4^3=8^2$. Καὶ τὸ συνολικὸν ἄθροισμα ἐκ τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ τετραγώνου Α ($=1^3$) καὶ τῶν ἐμβαδῶν τῶν γνωμόνων (πρώτου, δευτέρου), (τρίτου, τετάρτου, πέμπτου), (ἕκτου, ἑβδόμου, ὀγδόου, ἐνάτου) εἶναι $1^3+2^3+3^3+4^3=100=10^2$. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω παρατηροῦμεν ὅτι

Τὸ πρῶτον μερικὸν ἄθροισμα τῶν κύβων $1^3, 2^3, 3^3, \dots, n^3$ εἶναι $1^3=1^2$

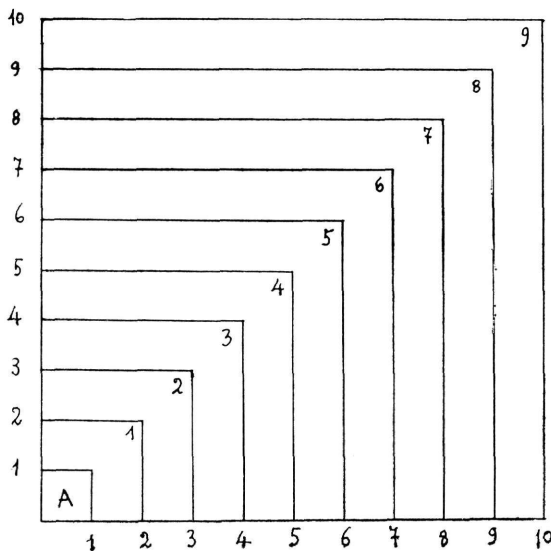
Τὸ δεύτερον μερικὸν ἄθροισμα τούτων ἀπὸ τῆς μονάδος εἶναι $1^3+2^3=3^2$

Τὸ τρίτον μερικὸν ἄθροισμα τούτων ἀπὸ τῆς μονάδος εἶναι $1^3+2^3+3^3=6^2$

Τὸ τέταρτον μερικὸν ἄθροισμα τούτων ἀπὸ τῆς μονάδος εἶναι $1^3+2^3+3^3+4^3=10^2$

. . . καὶ ὅτι οἱ ἀριθμοὶ 1, 3, 6, 10 . . . εἶναι ἡ ἀκολουθία τῶν τριγώνων ἀριθμῶν, οἱ ὅποιοι, ὡς γνωστόν, εἶναι τὰ ἀπὸ μονάδος διαδοχικὰ ἄθροίσματα τῆς ἀκολουθίας τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν. Ἐκ τούτων συνάγεται ὁ κανὼν, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ἀπὸ μονάδος n κύβων τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν εἶναι ὁ νουστός τρίγωνος ἀριθμὸς εἰς τὸ τετράγωνον. Ἐπειδὴ δὲ ὁ τρίγωνος οὗτος ἀριθμὸς εἶναι $\frac{n(n+1)}{2}$, τὸ ἄθροισμα

τῶν κύβων $1^3+2^3+\dots+n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2$.



ΝΕΟΕΛΛΗΝΕΣ ΠΟΙΗΤΑΙ ΕΙΣ ΛΑΤΙΝΙΚΟΥΣ ΣΤΙΧΟΥΣ ὑπὸ G. M. Lee

Α. ΚΑΛΒΟΣ

Ἄπὸ τὸν οὐρανόν,
ὅπου τὰ μελανόπτερα
σύννεφα ἀρμενίζου
τὸ ψυχρόν της ἀργύριον
ρίπτει ἢ σελήνη.

Qua fusco nebulae per spatia aetheris
pinnarum glomerant remigio viam,
spargis, diva, nitores
Luna argentea, frigidos.

Δ. ΣΟΛΩΜΟΣ

Δὲν ἀκούεται οὐτ' ἓνα κῦμα
εἰς τὴν ἔρημ ἀκρογιαλιά·
λὲς καὶ ἡ θάλασσα κοιμᾶται
μὲς τῆς γῆς τὴν ἀγκαλιά.

Omnis litore fluctuum
deserto sonus est procul ;
sopitum mare crederes
in terrae medio siuu.

Β Η Λ Α Ρ Α Σ

Πουλάκι ξένο, ξενιτεμένο
κυνηγημένο,
ποῦ νὰ σταθῶ ;
Ποῦ νὰ καθήσω, νὰ ξενυχτήσω,
νὰ μὴ χαθῶ ;

Ei mihi, ut volucris vaga et
sola et insidias pavens,
quo stem quovo morer loco
pernoctare ubi pessima
sospes a nece possim ?

ΑΧ. ΠΑΡΑΣΧΟΣ (Περὶ μικροῦ χρυσελεφαντίνου σταυροῦ)

Ἐμβλημα' ἀγάπης ἱερὸν καὶ σύμβολον ἐλπίδος
καὶ τῆς καλῆς νεάνιδος ὁ μόνος τότε πλοῦτος !

Hac spes, hac et amor radiat sub imagine sancta,
qua locuples sola pulchra puella fuit !

Ν. ΚΟΚΟΝΔΡΗΣ

Ὁ ἅγιος τάφος τοῦ Χριστοῦ ἐκεῖνος δὲν ἐκάη,
γιατὶ ὅπου βγαίνει τ' ἅγιο φῶς ἄλλη φωτιά δὲν πάει.

Christi sepulchrum flamma non profanavit :
contemnit alias ter sacrum faces lumen.

ΑΛ. Ρ. ΡΑΓΚΑΒΗΣ

ἐπέρασ' ὁ χειμώνας,
ἀνέλυσε τὸ χιόνι,
καὶ στοὺς παλιούς ἀνθῶνας
ἐπέστρεψες ἀηδόνι,
πουλι τοῦ Παρνασσοῦ.

Fugit bruma, nives non onerant agrum,
festinat silvas nunc iterum et sibi
notos visere flores
Parnasi Philomela avis.

Κ. ΠΑΛΑΜΑΣ

Σ' ὅτι προσμένουμε εἶναι ἡ ἀλήθεια, ὅχι σὲ ὅ,τι
ἀποχτᾶμε. Γι' αὐτὸ εἶν' ἔτσι ὠραία ἡ αὐγή·
προσμένει τὴν ἡμέρα.

Quod quaeris, hoc est Veritas, non quod tenes.
Aurora cur delectat ? Expectat diem.

ΜΙΙ. ΑΝΝΙΝΟΣ

Μήπως ἐγὼ ἤμην ἀνάξιος
ἢ μὴ τὸ πεπρωμένον ἦτον,
νὰ μὴ σὲ δρέψω καὶ δὲν σ' ἔδρεψα
ὦ ῥόδον, ἄνθος τῶν χαρίτων !

Me sors arcuit, aut minus merebar,
flore[m] carpere Gratiis dicatum !

Δ Η Μ Ω Δ Ε Σ

Χελιδόνα ἔρχεται
ἀπ' τὴν ἄσπρην θάλασσαν·
κάθισε καὶ λάλησε·
«Μάρτη, Μάρτη μου καλὲ
καὶ Φλεβάρη φλιβερέ,
κι ἂν χιονίσσης, κι ἂν ποντίσης,
πάλαι ἄνοιξιν μυρίζεις».

Cana super ponti venit freta, venit hirundo
proloquiturque sedens·
Mutavit nivibus Februari, Martius imbres
veris odor remeat !

ΔΩΔΕΚΑΝΗΣΙΑΚΟΝ ΔΗΜΩΔΕΣ

Ζάλην ἔχω ἐγώ, κυρά μου,
καὶ ὁ νοῦς μου σαλεμένος·
τίνος νὰ τὸ εἰπῶ οὐκ ἔχω,
εἰ μὴ ἐσένα, ἐρωτικὴ μου.

Saeva procella meam mentem circumstre-
pit, et tu,
cui fatear, sola es, quod facis ipsa, malum.

ΜΥΡΤΙΩΤΙΣΣΑ

Σ' ἀγαπῶ. Δὲ μπορῶ
τίποτ' ἄλλο νὰ πῶ
πιὸ βαθύ, πιὸ ἀπλό,
πιὸ μεγάλο.

Uror amore tui· nihil est hoc maius ab imo
quod prompsisse animo simplicius ne
queam.

ΙΟΥΔΑΙΑΝΟΣ (ἐν Π. Κανελλοπούλου, Πέντε Ἀθηναϊκοὶ διάλογοι)

*Ημασταν ἀδελφοὶ καὶ ξένοι·
ἀλλὰ μείναμε ὡς τὸ τέλος
ἀδελφοί.

Fratres eramus non et unanimi tamen ;
ad semper aliquid nomen hoc fratrum
fuit.

Δ Η Μ Ω Δ Ε Σ

Ἀλησμονιῶνται κι οἱ φιλιές, ξεχνιῶνται· κι οἱ ἀγάπες,
στὸν δρόμον ἀνταμώνονται σὰν ξένοι, σὰ διαβάτες.

Foedera prisca iacent, cepere obliviam amantes ;
fors confert medio praetereuntque foro.

ΧΡΙΣΤΟΦΟΡΟΣ ΜΥΤΙΑΗΝΑΙΟΣ (ΙΑ' αἰ. μ. Χ.)

Μίγνυνται ὡδε ἄμικτα, φύσις φλογέσσα καὶ ὑγρά
πῦρ θεότητος ἄϋλον Ἰορδάνου τε ῥέεθρα.

Reo non miscendae miscent se flumen et ignis.
aethere flamma creata, latex Iordanis ab unda.

ΚΕΚΑΥΜΕΝΟΣ (ΙΑ' αἰ. μ. Χ.)

Ὁ γὰρ πλούσιος θεὸς ἐστὶ τοῦ πτωχοῦ διὰ τὸ εὐεργετεῖν αὐτόν.

Locuples egeno qui dat instar est Divi.

ΧΡΙΣΤΟΦΟΡΟΣ ΜΥΤΙΑΗΝΑΙΟΣ (Περὶ τῆς χιόνας)

Κρατεῖς με καὶ φεύγω σε κεκρατημένη·
φεύγουσαν ἄθρεῖς καὶ κατασχεῖν οὐ σθένεις·
Κἂν γοῦν μέσης σφίγγης με παλάμης ἔσω,
κενὴν λιποῦσα φεύξομαι σὴν παλάμην.

Prendis, prehensa fugio, fugientem vides
inops tenere ; sin premas intra manum,
elapsa digitis palmam inanem deseram.